

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ЦЕНТР  
«НАДЕЖНОСТЬ И РЕСУРС БОЛЬШИХ СИСТЕМ И МАШИН»  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(НИЦ «НИР БСМ» УрО РАН)

УДК 614.8-027.21:519.2 504:519.2  
Рег. № НИОКТР АААА-А21-121011490020-5



ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗРАБОТКА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОСНОВ СУПРАЖИВУЧЕСТИ КЛЮЧЕВЫХ  
СТРАТЕГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ГАРМОНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ (ГОВЕРНАНСА)  
УМНЫМИ ИНФРАСТРУКТУРАМИ  
(промежуточный)  
(FUUF-2021-0001)

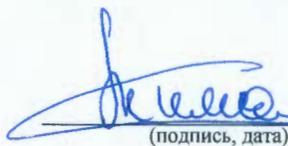
Руководитель НИР,  
Научный руководитель  
НИЦ «НИР БСМ» УрО РАН,  
глав. науч. сотр., д-р техн. наук

С.А. Тимашев

Екатеринбург 2021

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, науч. рук.,  
глав. науч. сотр., д-р техн. наук



(подпись, дата)

С.А. Тимашев  
(введение, раздел 1,  
заключение)

Исполнители:

Директор, канд. техн. наук



(подпись, дата)

Л.В. Полуян  
(раздел 3)

Уч. секретарь, канд. техн. наук



(подпись, дата)

Е.С. Гурьев  
(раздел 3)

Вед. науч. сотр., канд. техн. наук



(подпись, дата)

А.В. Бушинская  
(раздел 1)

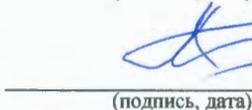
Вед. науч. сотр., д-р техн. наук



(подпись, дата)

В.П. Обоскалов  
(раздел 2)

Вед. науч. сотр., д-р техн. наук



(подпись, дата)

А.Н. Тырсин  
(раздел 4)

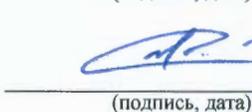
Стар. науч. сотр., канд. техн. наук



(подпись, дата)

М.Г. Малюкова  
(раздел 3)

Стар. науч. сотр., канд. техн. наук



(подпись, дата)

В.Н. Алехин  
(раздел 1)

Стар. науч. сотр., д-р техн. наук



(подпись, дата)

Ю.В. Рождественский  
(раздел 5)

Нормоконтроль, стар. инженер-  
исслед., б. с.



(подпись, дата)

Т.Г. Ковальчук  
(раздел 1)

## РЕФЕРАТ

Отчет 239 с., 1 кн., 81 рис., 31 табл., 143 источн., 3 прил.

СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ ИНФРАСТРУКТУР, НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ, НАДЕЖНОСТЬ, ХРУПКОСТЬ, АНТИХРУПКОСТЬ, СУПРАЖИВУЧЕСТЬ, ИНДЕКС КАЧЕСТВА ЖИЗНИ, ГОТОВНОСТЬ ПЛАТИТЬ, УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ, БЕЗОПАСНОСТЬ, КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ТРИБОСОПРЯЖЕНИЯ

*Объектом фундаментального и прикладного исследования* являются сложные нелинейные взаимозависимые системы ключевых и стратегических инфраструктур (электроэнергетические системы, промышленные, урбанистические и региональные инфраструктуры и др.), их комплексные и эмерджентные свойства, и разработка новых способов управления рисками их эксплуатации, в том числе, при возникновении событий типа *черный лебедь*.

*Цель работы* – создание цифровой методологии оптимального говернанса индустриальными, агропромышленными и муниципальными системами умных инфраструктур по локальным и планетарным критериям.

*Методы проведения работы* – МИБИКС-конвергентные технологии в контексте зонтичной науки инфранетики, теория антихрупкости и теория толстохвостых распределений. (МИБИКС – цифровая Механика, Искусственный интеллект, Биотехнологии, Информатика, Когнитивные и Социальные науки)

*Результатами НИР являются:*

- критерии и процедура оценки применимости антихрупкости для управления рисками киберфизических систем,

- принцип выявления принципиальной доступности статистической информации о тяжелых хвостах рассматриваемых распределений для практического применения теории антихрупкости,

- классификация основных наиболее приемлемых по точности технологий идентификации редких в электроэнергетике событий типа *дефицит мощности*,

- метод выбора метода идентификации по критерию робастности модифицированного кросс-энтропийного метода из класса преобразований функций распределения, с учетом объема тестовой выборки и необходимости вероятностных преобразований функций распределения,

- многомерная вероятностно-энтропийная модель риска, учитывающая взаимосвязанность элементов стохастической системы (факторов риска), в том числе, негауссовых,

- методика включения в состав вероятностно-энтропийных моделей многомерного риска стохастических систем дискретных компонент,

- эффективный алгоритм линейного регрессионного моделирования многомерных динамических процессов на основе метода наименьших модулей,

- метод моделирования количественной оценки риска разрушения потенциально опасного объекта (ПОО) с учетом его каскадного развития и алгоритм построения шаблона распределения вероятности разрушения ПОО,

- синтез ряда противоизносных компонентов на основе олеатов меди, олова и цинка, проведение их трибологических испытаний, которые показали, что их применение существенно сужают зону граничного трения и показатель износа снижается на 19–30%.

*Область применения* – поддержка и подготовка принятия решений лицами, принимающими решения корпоративного, муниципального и регионального уровня, связанных с непрерывностью производственных процессов и оказания услуг, устойчивого роста чистого валового продукта и качества благосостояния регионального социума.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	7
ВВЕДЕНИЕ .....	9
1     Метод синтеза индивидуальной надежности и супраживучести ключевых объектов инфраструктур и управления их эксплуатацией по критериям индекса качества жизни и готовности платить .....	11
1.1   Введение .....	12
1.2   Графическое представление хрупкости и антихрупкости [2] .....	19
1.3   Меры чувствительности хвостов распределения к неопределенности .....	22
1.4   Математическое описание хрупкости .....	35
1.5   Математическое описание антихрупкости .....	43
1.6   Особенности применения хрупкости/антихрупкости к техническим системами конструкциям .....	45
1.7   Заключение к разделу 1 .....	61
2     Разработка методов, ускоряющих процедуру статистического моделирования при расчете показателей балансовой надежности распределительных сетей с возобновляемыми источниками энергии .....	63
2.1   Введение .....	63
2.2   Дефицит мощности как редкое событие .....	67
2.3   Метод подпространств состояний .....	69
2.3.1  Моноцентр формирования промежуточной выборки .....	71
2.3.2  Метод опорных точек .....	72
2.4   Кросс-энтропийный метод .....	73
2.4.1  Упрощенный кросс-энтропийный метод .....	79
2.4.2  Модифицированный кросс-энтропийный метод .....	80
2.5   Проверочные расчеты .....	84
2.6   Заключение к разделу 2 .....	85
3     Компьютерное моделирование поражающих воздействий авиакатастрофы на близрасположенные потенциально опасные объекты .....	87
3.1   Введение .....	87
3.2   Обработка статистических данных .....	89
3.2.1  Построение гистограмм распределения вероятностей .....	89

3.2.2	Анализ обработанных статистических данных .....	98
3.3	Разработка методики оценки риска .....	99
3.3.1	Принятые допущения для разработки методики.....	99
3.3.2	Моделирование разлета обломков методом Монте-Карло .....	101
3.3.3	Моделирование попадания обломка самолета в резервуар методом конечных элементов.....	112
3.3.4	Алгоритм реализации разработанной методики .....	115
3.4	Реализация методики на примере реального ПОО авиационной инфраструктуры .....	119
3.4.1	Характеристика резервуарного парка.....	119
3.4.2	Обвалование резервуаров .....	119
3.4.3	Расчет вероятности разрушения ОПО.....	124
3.4.4	Оценка последствий и выводы.....	129
3.5	Заключение к разделу 3 .....	136
4	Энтропийный метод распознавания и анализа динамической информации о состоянии сложных региональных систем.....	138
4.1	Введение.....	138
4.2	Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития на примере территорий.....	138
4.2.1	Введение.....	139
4.2.2	Постановка задачи.....	140
4.2.3	Векторная энтропийная модель эффективного функционирования систем .....	141
4.2.4	Модель многомерного риска сложных систем.....	149
4.2.5	Формирование концепции устойчивого развития.....	156
4.2.6	Выводы .....	158
4.3	Энтропийное моделирование дискретных случайных векторов на примере группировок и балльных показателей .....	159
4.3.1	Введение.....	159
4.3.2	Материал и методы исследования .....	160
4.3.3	Результаты исследования и их обсуждение.....	163
4.3.4	Выводы .....	166

4.4	Моделирование риска в неоднородных стохастических системах .....	166
4.4.1	Введение .....	167
4.4.2	Материал и методы исследования .....	167
4.4.3	Результаты исследования и их обсуждение.....	169
4.4.4	Выводы .....	176
4.5	Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей .....	177
4.5.1	Введение.....	177
4.5.2	Методы исследования .....	180
4.5.3	Пример реализации .....	183
4.5.4	Обсуждение результатов .....	186
4.5.5	Выводы .....	189
4.6	Заключение к разделу 4 .....	189
5	Создание смазочных композиций, обеспечивающих надежную работу узлов трения машин и механизмов в условиях пониженных температур.....	191
5.1.	Введение.....	191
5.2.	Исследование подшипника при смазке индустриальным маслом И-40А.....	192
5.3.	Исследование подшипника при смазке гидравлическим маслом ВМГЗ-45....	196
5.4.	Заключение к разделу 5 .....	200
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	201
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	202
	ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	213
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б .....	226
	ПРИЛОЖЕНИЕ В .....	231
	СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ .....	238

## ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- БН – балансовая надежность
- ВКИ – взаимозависимые критичные инфраструктуры
- ВПШ – взлетно-посадочная полоса
- ВПр – функция плотности распределения
- ГП – готовность платить
- ДМ – дефицит мощности
- ИКЖ – индекса качества жизни
- КВ – коэффициент вариации
- КЭМ – кросс-энтропийный метод
- ЛПР – лицо, принимающее решение
- ЛЭП – линии электропередачи
- МИБИКС – цифровая стохастическая Механика, Искусственный интеллект, Биотехнологии, Информатика, Когнитивные и Социальные науки
- МКОСР – Международная комиссия ООН по окружающей среде и развитию
- МКЭМ – модифицированный кросс-энтропийный метод
- ММК – метод Монте-Карло
- МНК – метод наименьших квадратов
- МНМ – метод наименьших модулей
- МО – математическое ожидание
- МСС – межсистемные связи
- ПБН – показатели балансовой надежности
- ПОО – потенциально опасный объект
- Пр – плотность распределения
- ПС – пропускная способность
- РВС – резервуар вертикальный стальной
- СВ – случайная величина
- СКО – среднеквадратическое отклонение
- СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений
- ТВС – топливно-воздушная смесь
- ТП – теория перспектив
- ФПВ – функция плотности вероятности
- ФСР – функция субъективной полезности

ХНИЗ – хронические неинфекционные заболевания  
ЦТП – центр тяжести последствий  
ЭЭС – электроэнергетическая система  
СЕМ – cross entropy method (кросс-энтропийный метод)  
ЕСЕМ – модифицированный кросс-энтропийный метод  
ЕМ – максимальное правдоподобие (Expectation Maximization)  
ES – ExpectedShortfall (ожидаемые потери)  
GMM – модель смеси гауссиан  
TVaR – TailValueatRisk (стоимость хвоста под риском)  
VaR – ValueatRisk (стоимость под риском)

## ВВЕДЕНИЕ

Рост частоты появления новых типов киберрисков и стрессоров типа *черный лебедь*, формирование сообществ с растущими потребностями и связанными с ними конфликтами коренным образом изменили все парадигмы развития фундаментальных, прикладных и инженерных наук, связанных теорией и практикой оценки живучести, надежности, анализа рисков, безопасности и устойчивого роста систем взаимозависимых инфраструктур.

Можно следующим образом сформулировать современное представление о проблемах обеспечения безопасности систем критичных инфраструктур:

1) вторая природа (т.е., все, что создано человеком) все чаще рассматривается как набор взаимодействующих киберфизических многофазных сетей различной природы (в том числе, транспортных, Байеса, кредитных и др.), элементы которых взаимодействуют друг с другом вероятностным или неопределенным образом;

2) ускоренное развитие получает анализ распространения начальной неопределенности различной природы в алгоритмах, описывающих процессы диагностики, мониторинга, надежности, живучести, мейнтенанса, логистики, производства, безопасности и принятия решений;

3) наблюдается ускоренный рост числа статей, посвященных диагностике, мониторингу и прогнозированию надежности, ресурса, живучести и безопасности сетевых инфраструктур с использованием методологии искусственного интеллекта и машинного/глубокого обучения;

4) появилась концепция цифровых двойников и моделирование поведения сетей продвинутыми методами Монте-Карло с использованием суперкомпьютеров для построения представительного ансамбля реализаций численных опытов и сценариев;

5) заявлена концепция конвергентных МИБИКС-технологий (цифровая Механика и дизайн, искусственный Интеллект, Биотехнология, Информатика, Когнитивные и Социальные науки) и зонтичной науки инфранетики для решения задач, связанных со всеми этапами жизненного цикла систем и их говернанса (гармоничного управления) в контексте взаимодействия человека со второй природой.

В отчете рассматривается многогранная проблема говернанса сложными нелинейными сетевыми системами в условиях всевозрастающего многомерного риска и неопределенности современного мира.

Объектом фундаментального и прикладного исследования являются сложные нелинейные взаимозависимые системы ключевых и стратегических инфраструктур (электроэнергетические системы, промышленные, транспортные, урбанистические и региональные инфраструктуры и др.), их комплексные и эмерджентные свойства, и разработка новых способов управления рисками их эксплуатации, в том числе, при возникновении событий типа *черный лебедь*.

Цель работы – создание цифровой методологии оптимального говернанса индустриальными, агропромышленными и муниципальными системами умных инфраструктур по локальным и планетарным критериям.

Основными решаемыми задачами в отчетный период были:

1) разработка метода синтеза индивидуальной надежности и супраживучести ключевых объектов инфраструктур и управления их эксплуатацией по критериям индекса качества жизни и готовности платить,

2) разработка методов мониторинга состояния сложных систем на основе энтропийно-вероятностного моделирования,

3) разработка методов, ускоряющих процедуру статистического моделирования при расчете показателей балансовой надежности распределительных сетей с возобновляемыми источниками энергии,

4) разработка методики оценки риска и компьютерное моделирование поражающих воздействий авиакатастроф,

5) создание смазочных композиций, обеспечивающих надежную работу узлов трения машин и механизмов в условиях пониженных температур.

## **1 Метод синтеза индивидуальной надежности и супраживучести ключевых объектов инфраструктур и управления их эксплуатацией по критериям индекса качества жизни и готовности платить**

**Аннотация.** В отчете рассматривается проблема синтеза индивидуальной надежности, риска и супраживучести (полного аналога антихрупкости [1]) критичных (кибер)физических инфраструктур и систем, и управления их эксплуатацией по критериям индекса качества жизни (ИКЖ) и готовности платить (ГП), в контексте учета событий типа «черный лебедь». Этот синтез предполагается к использованию для случая уникальных объектов, надежность которых оценивается на основе теории индивидуальной надежности [2]. При этом их эмерджентное свойство супраживучести описывается через антихрупкость [3–5], а ИКЖ (и, соответственно, ГП) предлагается вычислять с помощью функции полезности Канемана-Тверски.

В отчете представлен всесторонний математический анализ концепции хрупкости / антихрупкости [3–5] (супраживучести) применительно к физическим инфраструктурам.

Данная концепция позволяет анализировать состояние объекта в условиях повышенной неопределенности для оценки его устойчивости и живучести креализации исключительных по мощности, но почти невозможных по вероятности шоков. Например, когда существующая целостная система, рассчитанная по действующим нормам (или множество таких систем), начинает испытывать воздействие нагрузок, которые качественно изменили свою природу (например, от глобального изменения климата).

Рассмотрено применение  $q$ -статистики Каниадакиса [7–9] (неэкстенсивной статистической механики), которая возникла в рамках специальной теории относительности Эйнштейна в 2001 г. Используется  $q$ -деформированная экспоненциальная функция Каниадакиса, с помощью которой вводятся новые классы статистических  $q$ -деформированных версий уже известных распределений. Эти распределения совпадают с исходными, однако их  $q$ -деформированный хвост следует степенному закону Парето. Это позволяет превращать исходные распределения в распределения с тяжелыми хвостами, которые более точно соответствуют экспериментальным данным смешанных систем и систем, эксплуатирующихся в условиях повышенной неопределенности. Это позволяет в рамках уже известных распределений нагрузок и воздействий моделировать сверхнормативные стрессоры и анализировать события типа «черный лебедь» (анализ устойчивости и живучести в экстренных ситуациях). Использование  $q$ -статистики позволяет получить простые аналитические

выражения в замкнутой форме для всех основных статистических функций, таких как функция плотности вероятности, функция распределения, функция выживания, функция квантилей, функция риска и кумулятивная функция риска.

Рассмотрено применение современной теории перспектив [6] при анализе хрупкости и антихрупкости объектов. Это экономическая теория в поведенческой экономике, описывающая поведение людей при принятии решений, связанных с рисками, при выборе среди вариантов с известными вероятностями. Она была разработана как описательная модель принятия решения в условиях неопределенности Нобелевским лауреатом психологом Даниэлем Канеманом и экономистом Амос Тверски. Используется функция полезности, которая описывает (поведенческое) значение выигрышного / проигрышного исхода игры. Это позволяет проводить анализ типа «прибыль–убытки» для финансового объекта с целью недопущения больших потерь от вероятного отказа наперед заданного порога, и учитывать индивидуальные особенности лица, принимающего решения (ЛПР).

## 1.1 Введение

Большинство ученых и исследователей считает, что хвосты распределений случайных величин, участвующих в вероятностном анализе физических инфраструктур (нагрузки и воздействия, погрешности изготовления узлов и конструкций, свойства материалов изделия и др.) несущественны и ими в обычной практике можно пренебречь, поскольку в них содержится пренебрежимо малая часть статистической выборки. Поэтому традиционно вероятностный анализ разнообразных инфраструктур осуществляется с применением функции плотности вероятности (ФПВ) с так называемыми «тонкими хвостами» (Гаусса, экспоненциальное и др.), у которых большие отклонения от средних величин очень редки.

Однако в последнее время все чаще стали наблюдаться аварии и катастрофы физических инфраструктур, вызванные реализациями СВ нагрузок и воздействий, находящихся на значительных расстояниях от их средних значений. При этом фактические вероятности их проявления оказываются на один или несколько порядков больше, чем предсказываемые ФПВ с тонкими хвостами. Этот феномен заставил исследователей пересмотреть свои взгляды и для адекватного описания стрессоров обратиться к ФПВ с толстыми хвостами.

Функции плотности вероятности, у которых хвосты убывают гораздо медленнее по сравнению с нормальным или экспоненциальным распределением, называются распределениями с толстыми хвостами. Они позволяют учитывать события (исчезающие) малой вероятности с непропорционально значительными (катастрофическими) последствиями. Они обнаруживаются в гидрологии, геологии, электротехнике, информатике, физике, страховании, хорошо описывают поведение финансовых рынков [10]. Статистика, описываемая такими распределениями, отличается тем, что редкие события, приходящиеся на хвост распределения, происходят не настолько редко, чтобы их можно было не учитывать [11].

Толстохвостые ФПВ относятся к фундаментальным понятиям теории риска, так как адекватно описывают абсолютное большинство процессов развития стихийных бедствий с большими ущербами, кризисных явлений и катастрофических ситуаций [12]. В терминах теории безопасности и риска хвост *такого* распределения робастно описывает так называемые *гипотетические аварии* [11].

Вероятности катастрофических последствий, рассчитанная с помощью ФПВ с толстыми хвостами могут на порядок и больше превышать вероятности, вычисленные на основании тонкохвостых ФПВ, поскольку хвосты медленно убывающие с ростом значений переменных содержат существенную часть выборки, которая автоматически отбрасывается во втором случае, что и ведет к значительным ошибкам.

Часто представления о надежности и риске базируются на предположении, что серьезные события происходят исключительно в результате неблагоприятного стечения ряда обстоятельств (так называемая катастрофа по типу «совершенный шторм (perfect storm)»), т.е. что любое крупное событие возникает как сумма большого числа мелких независимых событий, которая в силу центральной предельной теоремы распределена нормально [12]. Однако, как показывает практика, это далеко не так. Природа катастроф связана с сильной взаимозависимостью происходящих событий, К возникновению толстохвостых ФПВ приводит «цепная реакция», т.е. лавинообразное нарастание катастрофы с вовлечением в событие все большего количества объектов (так называемый «домино-эффект») [12].

Для анализа надежности технических систем используются методы анализа, основанные на собранной статистике и вероятностном подходе. Применение гауссовой математической статистики основано на убеждении в том, что получаемые результаты *не зависят* от объема выборки, изменяясь случайно от выборки к выборке. При вычислении среднего, дисперсии и других моментов распределения никто не задумывается об объеме

выборки, который в основном используется для оценки случайной ошибки выборочного значения данной величины. При работе с толстохвостыми распределениями такой подход приводит к серьезным ошибкам, потому что у негауссовых генеральных совокупностей моменты *растут с объемом выборки*. Поэтому при выборе подходящего эмпирического распределения следует учитывать не только степень близости выбираемой ФПВ к гистограмме конкретной выборки, но и специфику всей генеральной совокупности.

Теория катастроф (катастрофа – это внезапное, неожиданное скачкообразное изменение состояния (отклик) реальной сложной системы при плавном изменении внешних условий) рассматривает предельные состояния системы в аспекте ее устойчивости–неустойчивости. Первоисточниками теории катастроф являются *теория особенностей* Уитни и теория бифуркаций динамических систем Пуанкаре и Андронова. В.И. Арнольд, рассматривая проблему устойчивости двухпараметрических систем, в своей работе по теории катастроф [13] сформулировал так называемый *«принцип хрупкости хорошего»*:

*«Для системы, принадлежащей особой части границы устойчивости, при малом изменении параметров более вероятно попадание в область неустойчивости, чем в область устойчивости. Это проявление общего принципа, согласно которому все хорошее (например, устойчивость) более хрупко, чем плохое. По-видимому, все хорошие объекты удовлетворяют нескольким требованиям одновременно, плохим же считается объект, обладающий хотя бы одним из ряда недостатков».*

С ростом числа параметров, определяющих динамику системы, появляются новые возможности утраты ею устойчивости, и вероятность этого быстро возрастает. Чем сложнее динамическая система, и чем слабее механизмы ее саморегулирования, тем более *хрупким* оказывается ее состояние. С приближением к границе области устойчивости даже малые плавные изменения параметров могут привести к очень быстрой, скачкообразной потере устойчивости – катастрофе [13]. Другими словами, устойчивость обеспечивается целой гаммой признаков, а потеря устойчивости может быть спровоцирована нарушением любого из них [14].

*Все современные механические системы и объекты запроектированы на основе существующих норм (созданных путем обобщения многолетних экспериментальных и теоретических исследований материалов, нагрузок, воздействий, конструкций) и кумулятивного накопленного опыта их эксплуатации. Таким образом, существующие нормы концентрируются на том, что уже известно о системе и среде ее эксплуатации.*

Возникает вопрос: «Что будет, когда существующая целостная система, созданная по действующим нормам (или множество таких систем), начинает испытывать воздействие нагрузок, которые качественно изменили свою природу, например, от глобального потепления?»

Если техническая система (например, мост, самолет, нефте-газопровод) подвергается стрессу, превышающем проектные (нормативные) значения, то вероятность ее отказа резко возрастает. Тогда система либо выходит из строя (дальнейшая ее эксплуатация нецелесообразна), либо физически разрушается. Таким образом, для повышения живучести системы необходимо заложить в ее конструкцию и подсистемы диагностики, мониторинга и управления соответствующие функции, позволяющие ей продолжать свою полезную деятельность в некотором интервале нагрузок и воздействий, превышающем проектные значения. Другими словами, адаптировать функциональность и производительность системы к неопределенности.

В отчете используется теория хрупкости и антихрупкости Насима Талеба [3–5]. Талеб, являясь финансистом и трейдером, при математическом описании хрупкости и антихрупкости использует понятия из теории рынка ценных бумаги переносит эти понятия применительно к любым случайным величинам и их функциям распределения.

Данная работа проведена для того чтобы проверить, можно ли:

- Считать хрупкость и антихрупкость универсальными понятиями?
- Использовать концепцию и математический аппарат хрупкости/антихрупкости в нефинансовых сферах человеческой деятельности?
- Использовать критерии остановки эксплуатации финансового объекта (недопущение потерь больших наперед заданного порога) для управления эксплуатацией технического объекта, приносящего доход/прибыль?
- Найти в технической сфере аналоги ситуации, когда ранним симптомом отказа/аварии (аналога финансового краха) является рост скорости утолщения хвоста распределения потерь/риска?

Напомним, что рассматриваемая концепция была первоначально создана для рассмотрения *потерь* в финансовой системе (бирже) при возникновении на ней случайного события *x*, вызывающего *реальные, сиюминутные осязаемые потери*. Обычно возможные потери и прибыль представляются в виде так называемого распределения «прибыль–убытки» (profit-and-lossdistribution) для рассматриваемого диапазона времени (год, месяц, сутки и т.п.). Это распределение представляет собой, как правило, несимметричное распределение, где ноль разделяет прибыль и убытки. Таким образом,

правая часть относительно нуля представляет собой положительные значения возможной прибыли, а левая – отрицательные значения возможных потерь (см. рисунок 1.1.1).

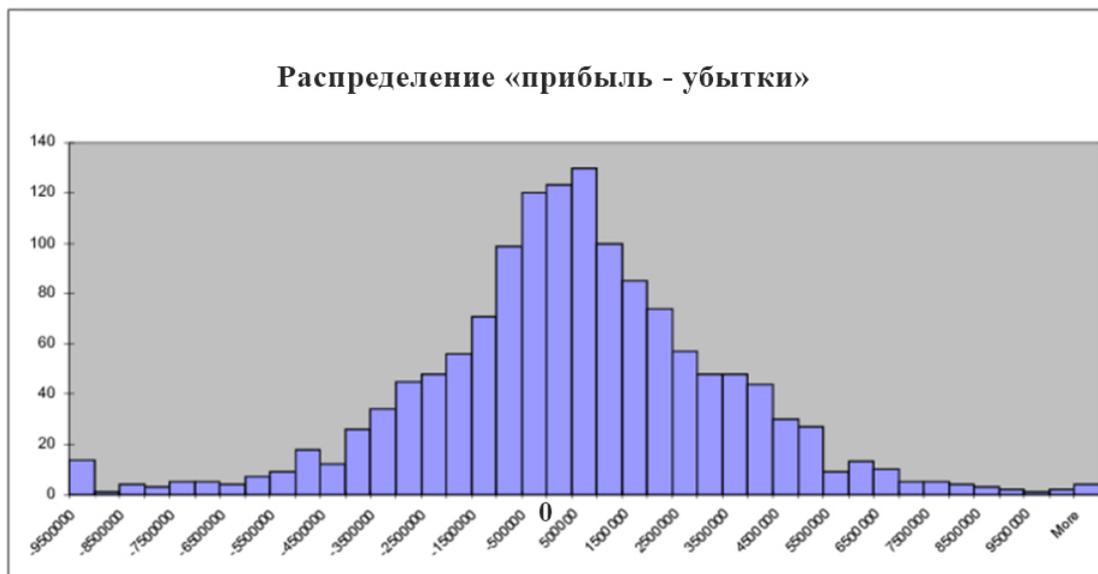


Рисунок 1.1.1 – Пример эмпирического распределения «прибыль–убытки»

Закон этого распределения, как правило, может быть найден, поскольку имеется огромная статистика, когда котировки акций и ценных бумаг обновляются каждую секунду/каждую минуту и визуализация изменения цены акций во времени широкодоступна.

Обычно трейдеров или финансовых экспертов интересует левый хвост этого распределения (см. рисунок 1.1.2), куда попадают все редкие, но очень тяжелые события (большие потери), особенно это касается распределений с тяжелыми хвостами.

Тяжелые хвосты распределений убывают гораздо медленнее по сравнению с нормальным или экспоненциальным распределением. В терминах оценки безопасности и риска хвост распределения соответствует кризисным явлениям и катастрофическим ситуациям (черный лебедь). В этом случае, редкие события, приходящиеся на «хвост» распределения, происходят не настолько редко, чтобы их можно было не учитывать.

Кроме распределения «прибыль–убытки» при анализе операционных рисков используют распределение потерь, где убытки описываются положительными числами и рассматривается уже правый хвост распределения (см. рисунок 1.1.3).

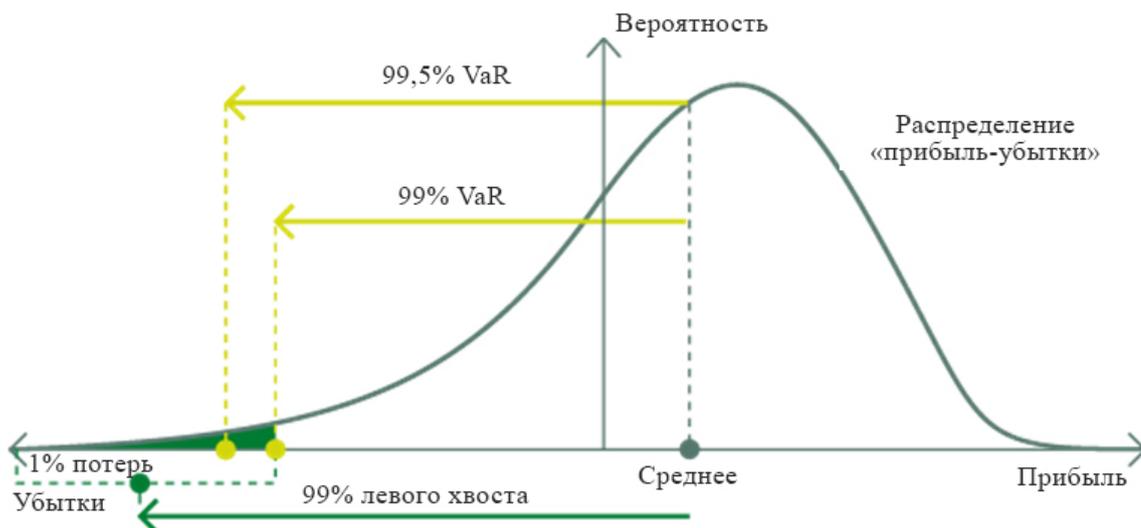


Рисунок 1.1.2 – Пример анализа левого хвоста распределения, представляющего возможные убытки

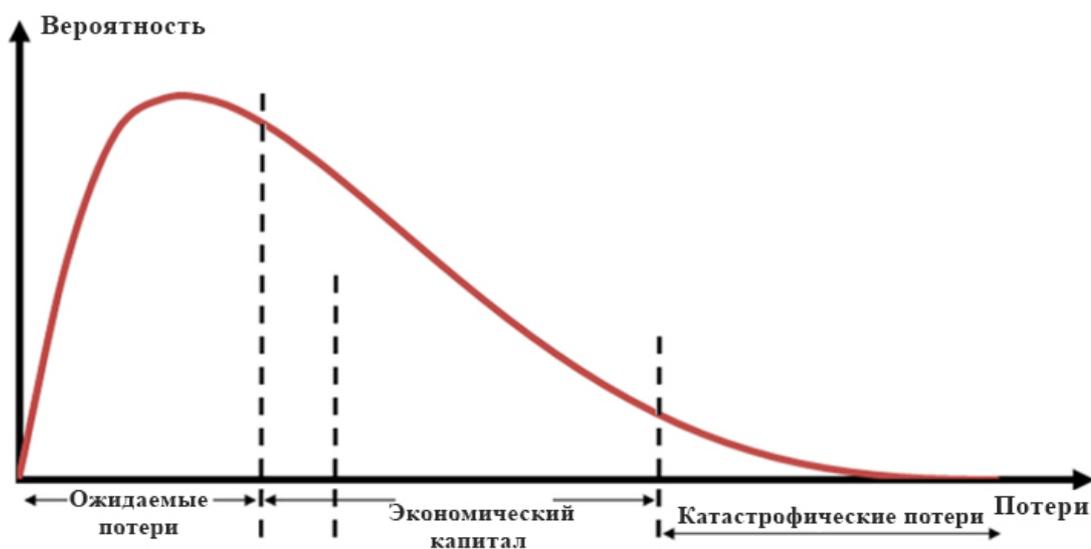


Рисунок 1.1.3 – Пример ФПВ распределения потерь

При описании хрупкости и антихрупкости Талеб рассматривает функцию  $g(x)$  как риск, связанный с переменной  $x$ . Можно также назвать  $g(x)$  «отдачей от  $x$ », «воздействием  $x$ », даже «полезностью отдачи от  $x$ », если  $g$  – это функция полезности. Переменная  $x$  является случайной величиной, следовательно,  $g(x)$  – функция от случайной величины и сама является случайной величиной.

Рассматриваются только *нелинейные функции*  $g(x)$ . Действительно, если СВ  $Y$  линейно зависит от  $X$ , то в случае простой линейной зависимости  $Y = aX + b$  закон распределения величины  $Y$  будет таким же как у  $X$  с ФПВ, равной:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

В случае, если  $a = 1$ , то ФПВ  $Y$  сдвинется на величину  $b$  и математическое ожидание  $Y$

$$M[Y] = M[X] + b.$$

Таким образом, такое преобразование повлечет за собой равенство хрупкости и антихрупкости величин  $X$  и  $Y$ .

При  $a \neq 1$ , изменится не только математическое ожидание, но и дисперсия

$$D[Y] = a^2 D[X].$$

В этом случае при  $0 < a < 1$  произойдет сжатие ФПВ относительно центра распределения, а при  $a > 1$  – расширение. Это повлечет изменение параметра масштаба распределения, что изменит и значение хрупкости и антихрупкости. При  $0 < a < 1$  ФПВ  $Y$  будет менее хрупким, но и менее антихрупким (уменьшается риск: убытки уменьшаются, но уменьшается и прибыль), при  $a > 1$  – оно станет более хрупким, но и более антихрупким (риск увеличивается: убытки увеличиваются, но увеличивается и прибыль).

Функция плотности вероятности СВ  $g(x)$  заметно отличается от ФПВ  $X$ , когда  $g(x)$  нелинейна. Необходимо применить нелинейное преобразование распределения  $X$ , чтобы получить ФПВ  $g(x)$ . В этом случае уже не очевидно как будет выглядеть ФПВ  $g(x)$  и как это скажется на хрупкости и антихрупкости.

На сами ФПВ также накладываются определенные условия: они должны быть *дифференцируемыми и одномодальными* (имеющими один центр распределения). Параметров распределения может быть *несколько*, но в расчетах рассматривается только параметр масштаба, который определяет статистический разброс ФПВ. Следует отметить, что у многих несимметричных распределений другие параметры распределения также

зависят от параметра масштаба. В этом случае эти параметры необходимо выразить через параметр масштаба и подставить в ФПВ.

## 1.2 Графическое представление хрупкости и антихрупкости [2]

Пусть  $g(x)$  – это риск, связанный с переменной  $x$ . Переменная  $x$  является случайной величиной, следовательно,  $g(x)$  – функция от случайной величины и сама является случайной величиной.

Рассмотрим ФПВ  $g(x)$  [2], где на горизонтальной оси отображается отдача (значения)  $g(x)$ , а на вертикальной – значение ФПВ для этой отдачи. Считаем, что значения  $g(x)$ , расположенные левее центра распределения (среднее значение, мода или медиана), являются потерями (*отрицательная отдача*), а расположенные правее – приобретениями (*положительная отдача*). Таким образом, рассматриваются *распределения типа «прибыль–убытки»*.

На рисунке 1.2.1 представлены 4 возможных состояния в зависимости от распределения вероятностей для  $g(x)$ . *Неуязвимое*: малая положительная и отрицательная отдача. *Хрупкое (тип 1, очень редкий)*: отдача может быть как большой положительной, так и большой отрицательной. Подобная симметрия очень редко встречается на практике, однако статистические распределения обычно упрощают реальность именно до такого графика. *Хрупкое (тип 2)*: невероятно большие потери (часто они скрыты и игнорируются), маленькие приобретения. Катастрофический неблагоприятный исход (слева) куда вероятнее благоприятного (справа), потому что левая сторона распределения толще правой. *Антихрупкое*: большие приобретения, маленькие потери. Благоприятный исход куда вероятнее неблагоприятного (последний может быть вообще невозможен). Правая сторона распределения, соответствующая благоприятному исходу, толще левой.

Тип состояния можно также определить по хвостам распределения (см. таблицу 1.2.1).

Рассмотрим, как увеличение неопределенности влияет на эти состояния. На рисунке 1.2.2 представлено изменение симметричного распределения (неуязвимое и хрупкое (тип 1)) при увеличении неопределенности.

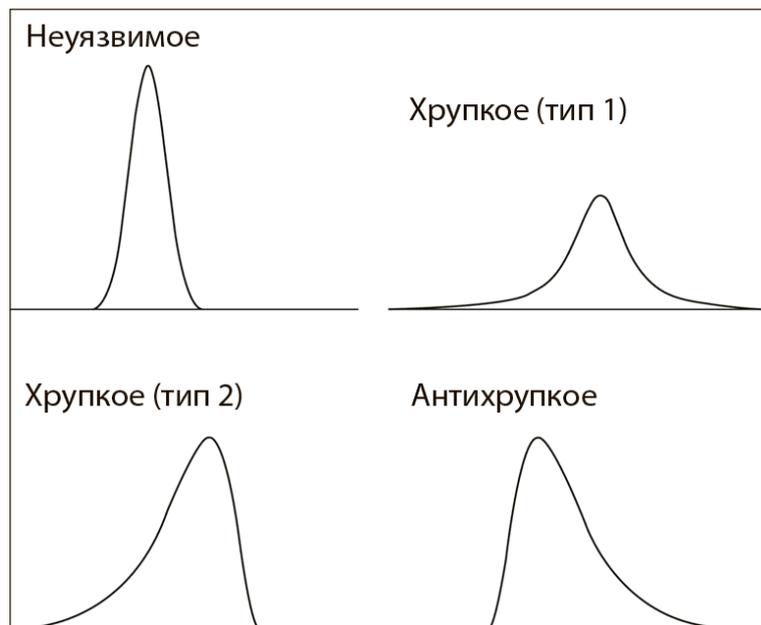


Рисунок 1.2.1 – Зависимость состояний от вида распределения

Таблица 1.2.1 – Зависимость состояния от хвостов распределения

Левый хвост распределения	Правый хвост распределения	Состояние
Тонкий	Толстый	Антихрупкость
Толстый	Толстый	Хрупкость (тип I, очень редкий)
Толстый	Тонкий	Хрупкость (тип II)
Тонкий	Тонкий	Неуязвимость

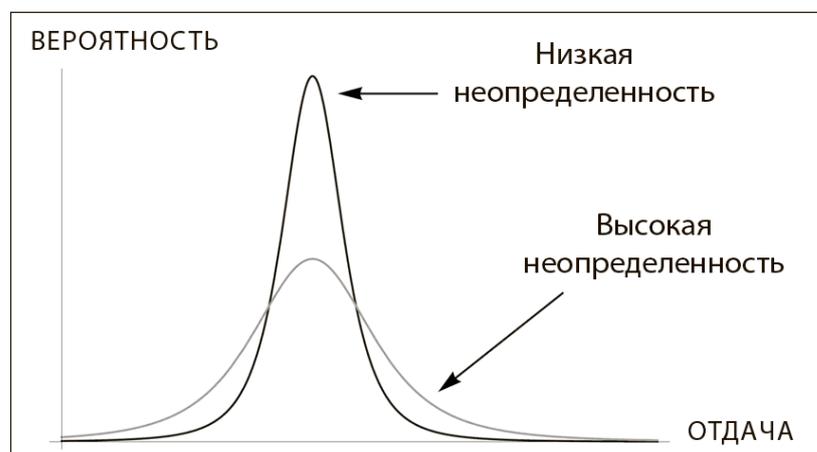


Рисунок 1.2.2 – Изменение симметричного распределения при увеличении неопределенности

Когда система становится более непредсказуемой (неопределенность возрастает), мы переходим от одной «колокольной» кривой – первой, с узкой областью возможной отдачи, ко второй, менее высокой, однако более растянутой. Соответственно увеличивается как вероятность положительных (позитивных) так и отрицательных (негативных) исходов.

Мерой расширения (сжатия) функций семейства параметрических распределений является коэффициент масштаба, который определяет статистический разброс распределения вероятностей. При увеличении этого параметра плотность распределения будет более растянутой вдоль оси абсцисс, а при уменьшении – более концентрированной вокруг центра распределения. Заметим, что коэффициент масштаба зависит от разброса (рассеяния) данных, поэтому его можно связать с какой-либо мерой разброса, например с дисперсией или любой другой мерой, так как дисперсия – это второй центральный момент распределения, который не существует (бесконечен) у некоторых распределений.

Рассмотрим, как изменяются несимметричные распределения (см. рисунок 1.2.3). Рисунок 1.2.3 слева, описывает хрупкость второго типа – ограниченные положительные исходы (приобретения) и огромные потери (отрицательные исходы). После увеличения уровня неопределенности в системе увеличивается вероятность в основном (или только) отрицательной отдачи, строго негативных событий (исходов). У хрупкости толстый левый хвост, а значит, она чувствительна к внезапным изменениям с левой стороны распределения вероятностей. Рисунок 1.2.3 справа, описывает антихрупкость. Когда система становится хаотичнее и неопределеннее, повышается вероятность очень благоприятного исхода – и соответственно увеличивается положительная отдача.

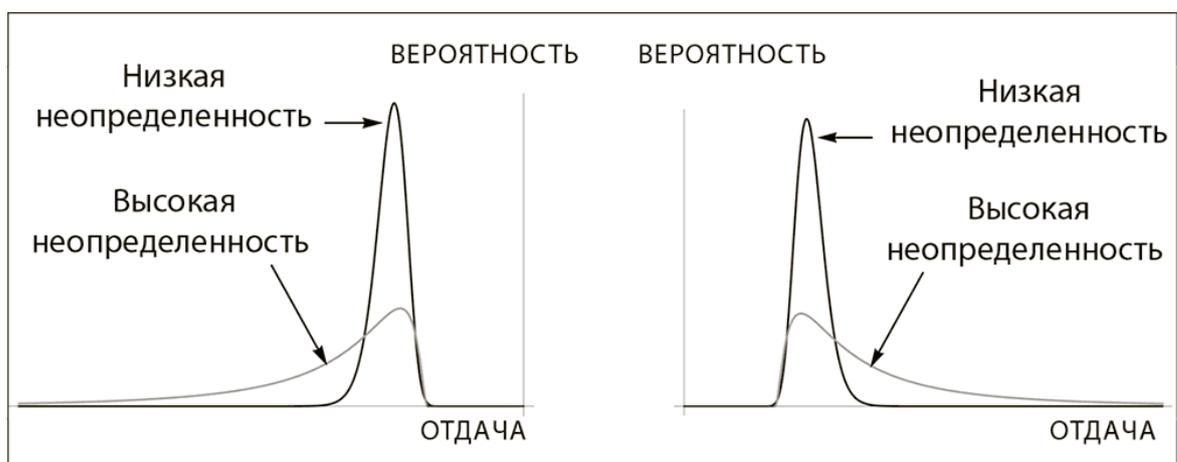


Рисунок 1.2.3 – Изменение несимметричных распределений при увеличении неопределенности

### 1.3 Меры чувствительности хвостов распределения к неопределенности

В финансовых и экономических областях существуют критерии анализа рисков финансовых организаций, отдельных секторов, рынков или финансовой системы в целом для оценки их устойчивости к реализации исключительных, но вероятных шоков. Очевидно, что такой риск-анализ производится в условиях неопределенности, например, когда необходима оценка требуемого уровня капитала финансовых институтов (банков, страховых компаний и т.д.). Если в рассматриваемом периоде организация понесет убытки, она должна иметь возможность покрыть их за счет собственных средств. Возникает вопрос оценки необходимой величины этих средств.

Рассмотрим несколько таких критериев [15]. Одним из критериев при оценке рисков является критерий Value-at-Risk (стоимость под риском, VaR). Первоначально он использовался в основном при оценке финансовых рисков, но постепенно область применения расширилась, и сейчас его можно встретить практически в любых областях экономики.

Пусть СВ  $X$  является распределением прибылей и убытков (profit-and-loss distribution), где убытки отрицательны, а прибыли положительны. Тогда вероятность того, что убытки  $X$  будут больше значения  $VaR_\gamma$ , равно  $\gamma$ :

$$P(-X \leq -VaR_\gamma) = F(-VaR_\gamma) = \gamma \quad (1.3.1)$$

Тогда вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение не ниже  $VaR_\gamma$ , равна  $1-\gamma$ . С математической точки зрения показатель  $VaR_\gamma$  является  $\gamma$ -процентным квантилем распределения СВ  $X$ :

$$F^{-1}(\gamma) = -VaR_\gamma. \quad (1.3.2)$$

где

$F^{-1}(\gamma)$  – функция, обратная функции распределения  $F(x)$  СВ  $X$ .

По сути  $VaR_\gamma$  – это минимальный убыток, на который может рассчитывать лицо принимающее решение (ЛПР) с вероятностью  $1-\gamma$ .

Графическая интерпретация критерия VaR приведена на рисунке 1.3.1. Вероятность превышения значения  $VaR_\gamma$  соответствует заштрихованной площади под графиком ФПВ, которая равна  $1-\gamma$ .

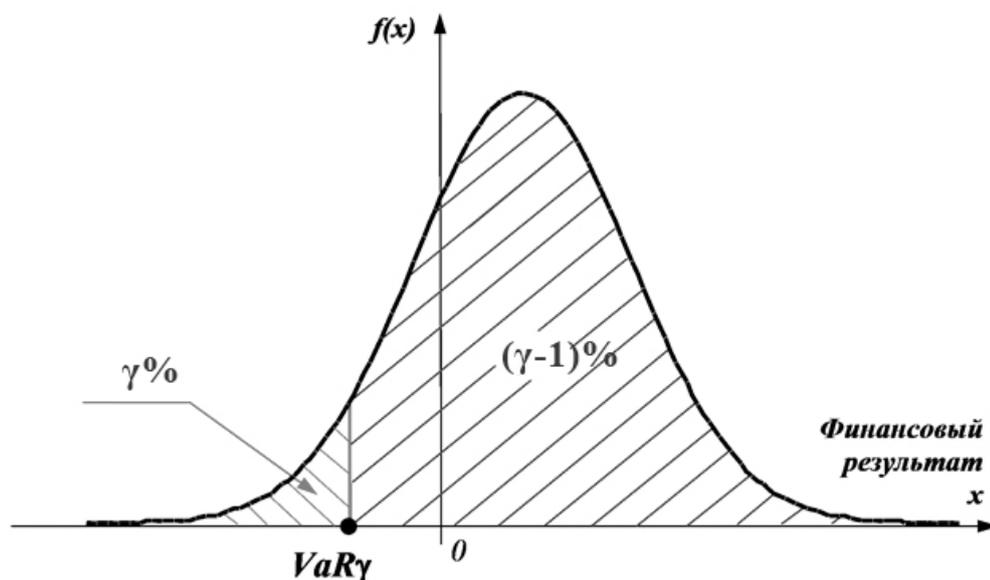


Рисунок 1.3.1 – Графическая интерпретация критерия VaR на графике функции плотности вероятности

Критерий VaR также применяется в случаях, когда  $X$  представляет собой убытки или потери, выраженные положительными значениями. Тогда  $VaR_\gamma$  характеризует максимальную величину убытка, которая не будет превышена с заданной вероятностью  $\gamma$  (см. рисунок 1.3.2)

$$P(X \leq VaR_\gamma) = F(VaR_\gamma) = \gamma \quad . \quad (1.3.3)$$

Уровень  $\gamma$  критерия VaR задается достаточно низким (1–10%). Это значит, что в 90–99% случаев можно ожидать, что результат будет не хуже, чем предсказывал критерий. Существенным недостатком критерия, проявляющимся в условиях высокой неопределенности, является неучет хвоста распределения. Именно в эти  $\gamma\%$  попадают все редкие, но очень тяжелые события (катастрофы, кризисы и т.д.), а критерий VaR не учитывает ни длину, ни форму хвоста.

Для устранения этого недостатка сравнительно недавно стал применяться критерий *ExpectedShortfall* (ожидаемые потери, ES). В отличие от VaR критерий ES оценивает именно хвост распределения, отсекаемый некоторой заданной границей. Оценкой по ES

является математическое ожидание этого хвоста. Например, если  $X$  представляет собой равные возможности понести убытки и получить прибыль, то ФПВ  $f(x)$  СВ  $X$  симметрично относительно нуля. Нас волнуют только те исходы, которые связаны с убытками. По критерию обычного математического ожидания о них судить нельзя – оно равно нулю. Убыткам соответствует левая часть распределения ( $-\infty < x < 0$ ). В данном случае показатель ES равен математическому ожиданию этой левой части распределения, отсеченной по границе  $x = 0$ . Таким образом, если данная часть распределения будет тяжелой, критерий ES это учтет и его значение будет хуже, чем для случая с тонким хвостом.

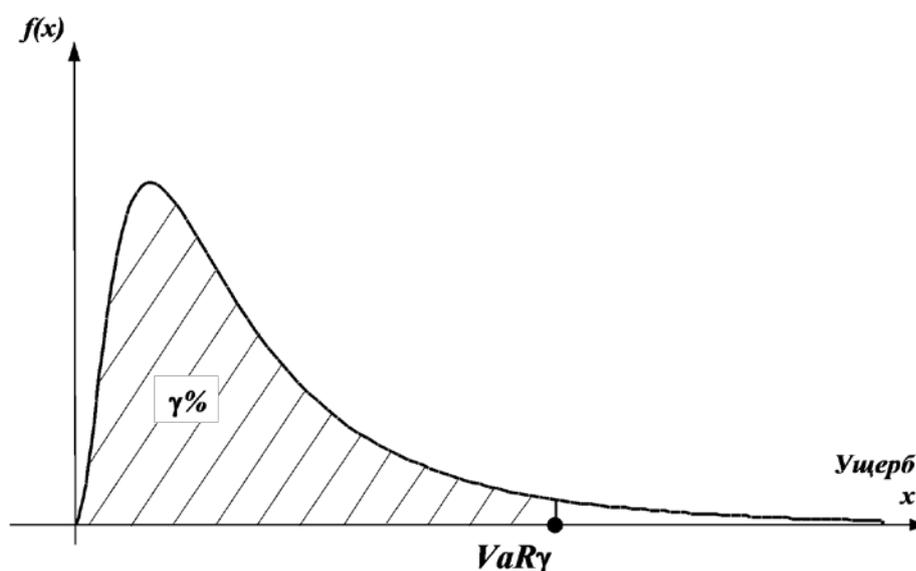


Рисунок 1.3.2 – Применение показателя VaR для оценки убытков

Математически критерий записывается следующим образом:

$$ES_\alpha^{(L)} = E[-X | X < -a] = -\frac{1}{F(-a)} \int_{-\infty}^{-a} xf(x) dx. \quad (1.3.4)$$

Если  $X$  представляет собой убытки, выраженные положительными значениями, то показатель ES будет определяться для правого хвоста распределения

$$ES_\alpha^{(R)} = E[X | X > a] = \frac{1}{1 - F(a)} \int_a^{+\infty} xf(x) dx. \quad (1.3.5)$$

Здесь  $a$  представляет собой конкретное задаваемое ЛПР значение, которое отсекает левую часть распределения. В приведенном выше примере, где мы рассматривали только убытки,  $a$  было равно нулю (рисунок 1.3.3).

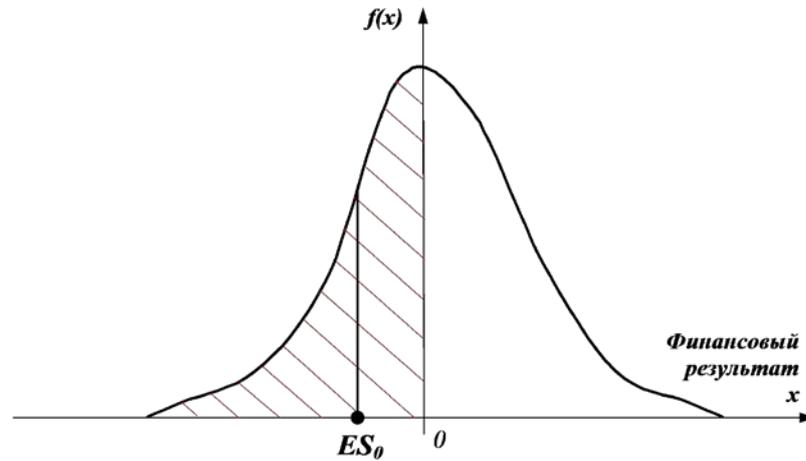


Рисунок 1.3.3 – Графическая интерпретация критерия ES (граница отсечения  $a$  соответствует  $x = 0$ )

Таким образом,  $ES$  – это взвешенное по вероятности математическое ожидание потерь в хвосте распределения, отсекаемым каким либо предельным значением  $a$ .

В настоящее время при оценке рисков недостаточности капитала финансовых институтов (банков, страховых компаний, свободного капитала корпораций и т.д.) в числе прочих используется показатель, который называется TailValueatRisk (стоимость хвоста под риском,  $TVaR$ ). Это показатель  $ES$ , для которого в качестве границы  $a$  взято уже рассчитанное значение  $VaR_\gamma$ :

$$ES_{VaR_\gamma}^{(L)} = TVaR_\gamma = E[-X | X < -VaR_\gamma] = -\frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{-VaR_\gamma} xf(x) dx. \quad (1.3.6)$$

Пусть  $Y$  представляет собой убытки, выраженные положительными значениями, тогда показатель  $TVaR$  определяется правым хвостом распределения  $Y$

$$TVaR_\gamma^{(R)} = E[Y | Y > VaR_\gamma] = \frac{1}{1-\gamma} \int_{VaR_\gamma}^{+\infty} yf(y) dy. \quad (1.3.7)$$

$TVaR$  позволяет оценить средний ожидаемый убыток при условии, что он превысит  $VaR_\gamma$ .

Величины  $TVaR_\gamma^{(L)}$  и  $TVaR_\gamma^{(R)}$  связаны соотношением:

$$\begin{aligned} TVaR_\gamma^{(L)} &= -\frac{1}{\gamma} E[X] + \frac{1-\gamma}{\gamma} TVaR_\gamma^{(R)}, \\ TVaR_\gamma^{(R)} &= \frac{1}{1-\gamma} E[L] + \frac{\gamma}{1-\gamma} TVaR_\gamma^{(L)}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Первоначально требования к величине капитала ориентировались на показатель  $VaR$ , рассчитанный исходя из смоделированного распределения результатов деятельности учреждения при заданной государственным регулятором уровне безопасности  $1-\gamma$ . Действительно, если обладать средствами в размере  $-VaR_\gamma$ , то их с вероятностью  $1-\gamma$  должно хватить на покрытие убытка. При установленной надзорными органами величине  $1-\gamma$ , такая надежность представлялась вполне достаточной. Однако, как показал кризис 2008 года, данный подход не обеспечивает финансовую устойчивость в случае реализации исключительных событий (черных лебедей), приходящихся на хвост распределения. Поэтому для оценки достаточности капитала в условиях кризисов стали использовать показатели  $TVaR$  и  $ES$ .

На рисунке 1.3.4 представлена графическая иллюстрация показателей  $VaR$  и  $TVaR$ . Нетрудно заметить, что для заданного уровня безопасности  $1-\gamma$  значение  $TVaR$  является более осторожным критерием, чем  $VaR$ . Значит, если сформировать собственные средства в размере  $-TVaR$ , их должно хватить на покрытие убытков с большей вероятностью, чем при использовании критерия  $VaR$ .

Формулы для оценки  $TVaR_\gamma^{(L)}$  и  $TVaR_\gamma^{(R)}$  получены почти для всех наиболее известных распределений.

Следует отметить, что многие распределения положительных величин могут не иметь левого хвоста в обычном его понимании, так как форма распределения зависит от значения параметра формы. Например, на рисунке 1.3.5 представлены графики ФПВ распределения Вейбулла, откуда видно, что при  $k = 0.5, 1.0, 1.5$  у ФПВ отсутствует левый хвост.

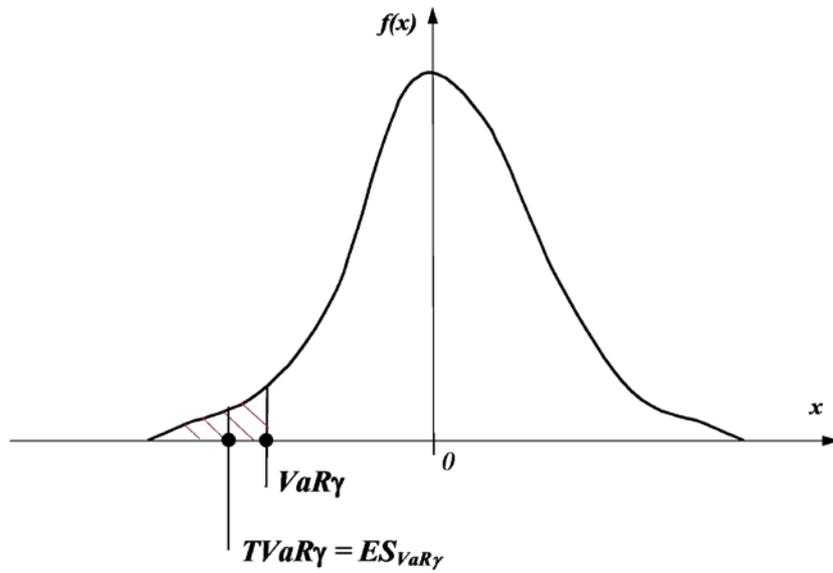


Рисунок 1.3.4 – Графическое сравнение критериев  $VaR$  и  $TVaR$

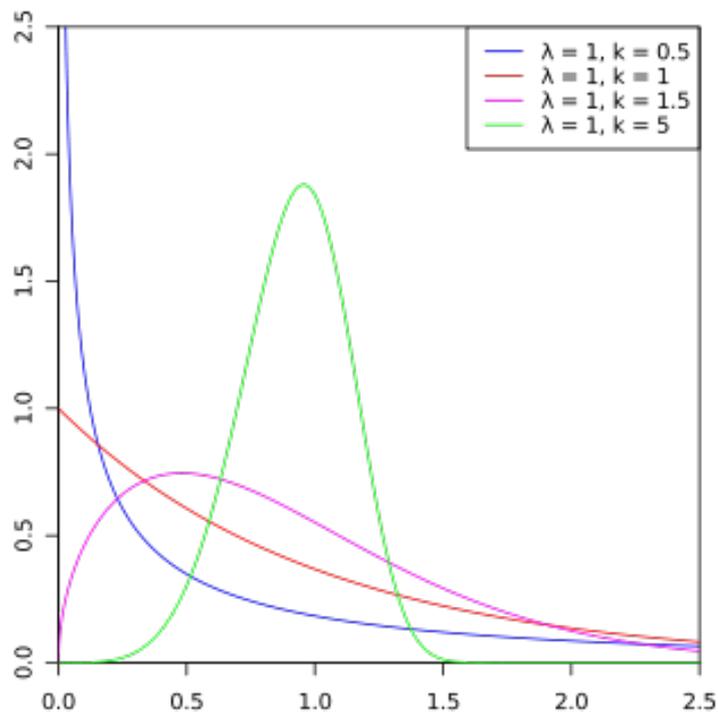


Рисунок 1.3.5 – ФПВ распределения Вейбулла при разных значениях параметра формы  $k$

Для подобных распределений были найдены выражения только для  $TVaR_\gamma^{(R)}$  (для правого хвоста). Однако при определенных значениях параметра формы, такие

распределения могут иметь оба хвоста ( $k = 5$ , см. рисунок 1.3.5). В этом случае, с помощью формул (1.3.8) не трудно получить выражение  $TVaR_\gamma^{(L)}$  и для левого хвоста.

Тяжесть хвоста – понятие относительное, например, когда мы сравниваем два распределения. Рассмотрим несколько методов оценки тяжести хвоста распределения.

**Существование моментов.** Для положительного действительного числа  $k$  момент  $E(X^k)$  определяется интегралом  $\int_0^{+\infty} x^k f(x) dx$ , где  $f(x)$  – ФПВ рассматриваемого распределения. Если распределение ставит значительно больше вероятностей в большие значения в правом хвосте, этот интеграл может не существовать (не сходиться) для некоторого  $k$ . Таким образом, наличие моментов  $E(X^k)$  для всех положительных  $k$  указывает на то, что распределение не является распределением с тяжелым хвостом.

Если положительные моменты существует только для определенных значений  $k$ , то это указывает на то, что распределение имеет тяжелый правый хвост.

Рассмотрим распределение Парето с параметром формы  $\alpha$  и параметром масштаба  $\theta$ . У данного распределения существование высших моментов  $E(X^k)$  ограничено параметром формы  $\alpha$ . Если  $\alpha = 1$ , математическое ожидание бесконечно и данное распределение не может использоваться для моделирования убытков. С другой стороны, когда  $\alpha \leq 2$ , дисперсия Парето не существует, что показывает, что для распределения с тяжелыми хвостами дисперсия не может быть адекватной мерой риска.

**Функция риска (hazard function).** Функция риска  $h(x)$  случайной величины  $X$  определяется как отношение ФПВ к функции выживаемости

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}. \quad (1.3.9)$$

В теории выживаемости функция риска называется силой смертности в контексте непредвиденных обстоятельств жизни и может быть интерпретирована как скорость, с которой человек в возрасте  $x$  умрет в следующий момент. В теории надежности функция риска представляет собой интенсивность отказа конструкции в следующий момент, при условии, что она проработала в течение  $x$  единиц времени.

Признаком тяжелого хвоста является то, что распределение имеет убывающую функцию риска. С другой стороны, распределение, не имеющее тяжелый хвост, будет иметь возрастающую функцию риска.

Если функция риска уменьшается со временем и случайная величина является временем, то популяция вымирает с убывающей скоростью. Следовательно, у рассматриваемого распределения будет более тяжелый хвост.

Распределение Парето – это распределение с тяжелым хвостом, поскольку функции риска являются убывающими:  $h(x) = \alpha / x$  (Тип I) и  $h(x) = \alpha / (x + \theta)$  (Тип II Lomax). Распределение Ломакса (Lomax) – это распределение Парето (какого-либо типа), сдвинутое в начало координат.

Распределение Вейбулла является более гибким распределением, в том смысле, что, когда его параметр формы  $0 < k < 1$  функция риска возрастает, а когда  $k > 1$  – убывает. Когда  $k = 1$ , распределение Вейбулла представляет собой экспоненциальное распределение с постоянной функцией риска.

Убывание функции риска означает, что функция выживаемости медленно падает до нуля. Это связано с тем, что функция выживаемости зависит от функции риска следующим образом:

$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t) dt} \quad (1.3.10)$$

Таким образом, если функция риска убывает по  $x$ , то функция выживаемости будет убывать медленнее до нуля.

Рассмотрим функцию

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt, \quad (1.3.11)$$

которая называется кумулятивной функцией риска (cumulative hazard function). Как указано выше,  $S(x) = e^{-H(x)}$ . Если  $h(x)$  уменьшается по  $x$ ,  $H(x)$  имеет более низкую скорость увеличения и, следовательно,  $S(x) = e^{-H(x)}$  имеет более медленную скорость уменьшения до нуля.

Напротив, экспоненциальное распределение имеет постоянную функцию риска, что делает его распределением со средним хвостом.

**Функция среднего значения распределения превышений.** Среднее значение распределения превышений случайной величиной  $X$  порога  $d$  выглядит следующим образом:

$$e(d) = E[X - d | X > d] = \int_d^{+\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(d)} dx, \quad (1.3.12)$$

где

$F(x)$  – функция распределения.

Если СВ  $X$  представляет убытки, среднее превышений – это ожидаемые убытки, превышающие пороговое значение  $d$ , при условии, что это пороговое значение было превышено.

Когда  $e(d)$  является возрастающей функцией параметра  $d$ , распределение будет иметь тяжелый хвост, если убывающей – распределение не будет иметь тяжелого хвоста. Для распределения Парето типа I с параметром формы  $\alpha$  и параметром масштаба  $\theta$  функция среднего превышений  $e(d) = d / (\alpha - 1)$ , которая возрастает относительно  $d$ . Для Парето типа II  $e(d) = (d + \theta) / (\alpha - 1)$ , которая также возрастает.

Экспоненциальное распределение имеет постоянную функцию среднего превышений и считается распределением со средним хвостом.

**Скорость уменьшения функции выживаемости до нуля.** Как было показано выше, если функция выживаемости распределения медленно падает до нуля (эквивалентно медленному стремлению функции распределения к единице), то это еще один признак того, что распределение имеет тяжелые хвосты.

Этот критерий позволяет сравнивать два распределения. Всякий раз, когда отношение двух функций выживаемости сходится к бесконечности, это указывает на то, что распределение в числителе имеет более тяжелый хвост, чем распределение в знаменателе, так как функция выживаемости в числителе убывает медленнее до нуля по сравнению с функцией в знаменателе.

При анализе распределений важно изучить поведение хвоста. Приведенные выше четыре критерия обеспечивают способ классификации параметрических распределений в соответствии с видом их хвоста.

Вернемся теперь к концепции Н. Талеба [3–5]. Математически хрупкость и антихрупкость определяется через меру чувствительности хвостов распределения к неопределенности, которая зависит от левого абсолютного полуотклонения распределения от величины  $\Omega$ , которая отделяет зону убытков от зоны прибыли в ФПВ распределения «убытки–прибыль». То есть используются отклонения только той части, которая находится либо слева от  $\Omega$  (потери, для определения хрупкости), либо справа от  $\Omega$

(приобретения, для определения антихрупкости) (см. рисунок 1.3.6). Без потери общности, примем за такую величину центр распределения.

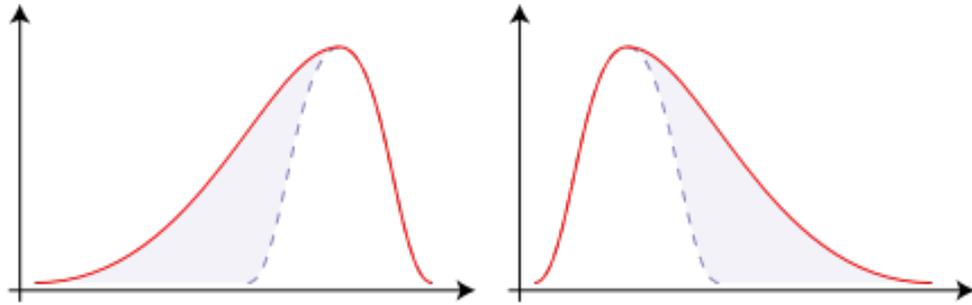


Рисунок 1.3.6 – Пример несимметричных распределений с разными частями относительно центра распределения

Как было отмечено выше, дисперсия (стандартное отклонение) требует существования второго конечного момента распределения, таким образом, использование абсолютного полуотклонения позволяет устранить этот недостаток.

Пусть  $X$  – случайная величина, распределение которой принадлежит семейству одномодальных распределений. Обозначим ФПВ СВ  $X$  через  $f(\lambda, x)$ , где  $\lambda$  – параметр масштаба распределения. Тогда среднее абсолютное отклонение СВ  $X$ :

$$MAD = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega - x| f(x, \lambda) dx = \int_{-\infty}^{\Omega} (\Omega - x) f(x, \lambda) dx + \int_{\Omega}^{+\infty} (x - \Omega) f(x, \lambda) dx, \quad (1.3.13)$$

где

$\Omega$  – центр распределения.

Интегралы в правой части уравнения (1.3.13) представляют собой левое  $s^{(-)}$  и правое  $s^{(+)}$  абсолютное (absolute semi-deviation) от центра распределения [4, 5]:

$$\begin{aligned} s^{(-)} &= \int_{-\infty}^{\Omega} (\Omega - x) f(x, \lambda) dx, \\ s^{(+)} &= \int_{\Omega}^{+\infty} (x - \Omega) f(x, \lambda) dx. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Для фиксированных значений  $K_1, K_2$  и величин  $s^{(-)}, s^{(+)} \in R_+$  рассмотрим величину левого и правого полуотклонения в промежутке от  $-\infty$  до  $K^{(-)}$  ( $K^{(-)} < \Omega$ ) и от  $K^{(+)}$  до  $+\infty$  ( $K^{(+)} > \Omega$ ) [4,5]:

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= \int_{-\infty}^{K^{(-)}} (\Omega - x) f(x, \lambda) dx. \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= \int_{K^{(+)}}^{+\infty} (x - \Omega) f(x, \lambda) dx.\end{aligned}\tag{1.3.15}$$

Эти величины, по сути, являются *условным левым и правым полуотклонением*. Тогда по свойствам интеграла

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= \Omega \int_{-\infty}^{K^{(-)}} f(x) dx - \int_{-\infty}^{K^{(-)}} xf(x) dx = \Omega F(K^{(-)}) - \int_{-\infty}^{K^{(-)}} xf(x) dx. \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= \int_{K^{(+)}}^{+\infty} xf(x) dx - \Omega \int_{K^{(+)}}^{+\infty} f(x) dx = \int_{K^{(+)}}^{+\infty} xf(x) dx - \Omega (1 - F(K^{(+)})).\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

Рассмотрим условные математические ожидания относительно событий  $X < a$ ,  $X > a$ ,  $a < X < b$ :

$$\begin{aligned}E[X|X < a] &= \frac{\int_{-\infty}^a xf(x) dx}{F(a)}, \\ E[X|X > a] &= \frac{\int_a^{+\infty} xf(x) dx}{1 - F(a)}, \\ E[X|a < X < b] &= \frac{\int_a^b xf(x) dx}{F(b) - F(a)}.\end{aligned}\tag{1.3.17}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= (\Omega - E[X | X < K^{(-)}])F(K^{(-)}), \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= (E[X | X > K^{(+)}] - \Omega)(1 - F(K^{(+)})).\end{aligned}\tag{1.3.18}$$

Условные математические ожидания зависят от закона распределения СВ  $X$ , то есть от вида ФПВ. Следует отметить, что величины (1.3.18) являются стоимостными мерами риска при принятии решений в условиях неопределенности и были описаны выше.

Таким образом, величины  $\xi^{(-)}(K^{(-)})$  и  $\xi^{(+)}(K^{(+)})$  могут быть определены через показатель  $ES$ , у которого граница  $a = K^{(-)}(K^{(+)})$  или через показатель  $TVaR$  при  $VaR_\gamma = K^{(-)}(K^{(+)})$ :

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= (\Omega - ES_{K^{(-)}}^{(L)})F(K^{(-)}), \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= (ES_{K^{(+)}}^{(R)} - \Omega)(1 - F(K^{(+)})).\end{aligned}\tag{1.3.19}$$

Например, для нормального распределения:

$$\begin{aligned}TVaR_\gamma^{(L)} &= \mu - \sigma^2 \frac{f(K^{(-)})}{\gamma}, \\ TVaR_\gamma^{(R)} &= \mu + \sigma^2 \frac{f(K^{(+)})}{1 - \gamma}.\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= (\Omega - \mu)F(K^{(-)}) + \sigma^2 f(K^{(-)}), \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= (\mu - \Omega)(1 - F(K^{(+)})) + \sigma^2 f(K^{(+)}).\end{aligned}\tag{1.3.21}$$

Если в качестве  $\Omega$  рассматривается центр распределения, то  $\mu = \Omega$  и

$$\begin{aligned}\xi^{(-)}(K^{(-)}) &= \sigma^2 f(K^{(-)}) \\ \xi^{(+)}(K^{(+)}) &= \sigma^2 f(K^{(+)}).\end{aligned}\tag{1.3.22}$$

Если  $K^{(+)} = K^{(-)}$ , то  $\xi^{(-)}(K) = \xi^{(+)}(K^{(+)})$ .

Для правого хвоста распределения Вейбулла:

$$TVaR_{\gamma}^{(R)} = \frac{\lambda}{1-\gamma} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, -\ln(1-\gamma)\right). \quad (1.3.23)$$

Тогда

$$\xi^{(+)}(K^{(+)}) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, -\ln(1 - F(K^{(+)}))\right) - \Omega. \quad (1.3.24)$$

где

$\lambda, k$  – параметры распределения,

$\Gamma(x)$  – гамма функция,

$\Gamma(s, x)$  – верхняя неполная гамма-функция.

Если у распределения Вейбулла имеется левый хвост (также содержит положительные значения), то

$$TVaR_{\gamma}^{(L)} = \frac{\lambda}{\gamma} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda}{\gamma} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, -\ln(1-\gamma)\right). \quad (1.3.25)$$

$$\xi^{(-)}(K^{(-)}) = \Omega - \lambda \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, -\ln(1 - F(K^{(-)}))\right) \right]. \quad (1.3.26)$$

Таким образом, почти для всех распространенных распределений не сложно получить выражения для  $\xi^{(-)}(K)$  и  $\xi^{(+)}(K)$ .

Используя формулу (1.3.19), аналогично можно получить выражения для абсолютных полуотклонений:

$$\begin{aligned} s^{(-)} &= \xi^{(-)}(\Omega) = (\Omega - ES_K^{(L)}) F(\Omega), \\ s^{(+)} &= \xi^{(+)}(\Omega) = (ES_K^{(R)} - \Omega)(1 - F(\Omega)). \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Если распределение симметрично относительно  $\Omega$ , то  $s^{(-)} = s^{(+)}$ .

Например, для нормального распределения:

$$s^{(-)} = s^{(+)} = \sigma^2 f(\Omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.3.28)$$

#### 1.4 Математическое описание хрупкости

Рассмотрим распределение, у которого левый хвост описывает критические значения рассматриваемой случайной величины. Для таких распределений производится анализ хрупкости левого хвоста и рассматривается величина  $\xi^{(-)}(K^{(-)})$ . В случае, если анализируется, например, распределение убытков (положительные значения), то для оценки хрупкости необходимо рассматривать величину  $\xi^{(+)}(K^{(+)})$ .

Предполагается, что функция  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  дифференцируема на участке  $[-\infty; \Omega] \times R_+$ .

Тогда  $K$ -чувствительностью левого хвоста ФПВ  $f(\lambda(s^{(-)}), x)$  на уровне стресса  $K^{(-)} < \Omega$  и уровне полуотклонения  $s^{(-)}$  будет величина вида [4, 5]:

$$V(K^{(-)}, s^{(-)}) = \frac{\partial \xi}{\partial s^{(-)}}(K^{(-)}, s^{(-)}) \left( = \int_{-\infty}^{K^{(-)}} (\Omega - x) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(-)}), x) dx \right) \frac{d\lambda}{ds^{(-)}}. \quad (1.4.1)$$

$K$ -чувствительность определяет *мгновенную* скорость изменения полуотклонения  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  в промежутке от  $-\infty$  до  $K^{(-)}$  при изменении величины  $s^{(-)}$ , то есть насколько чувствительна функция  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  к изменению величины  $s^{(-)}$  в точке  $K^{(-)}$ . Величина  $V(K^{(-)}, s^{(-)})$  указывает на изменение  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  при изменении величины  $s^{(-)}$  на  $\Delta s^{(-)}$ . Например, если значение  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)}) = 2.2$  имеет значение  $V(K^{(-)}, s^{(-)}) = 0.17$ , то это означает, что если  $s^{(-)}$  увеличится на  $\Delta s^{(-)}$ , величина  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  увеличится на  $0.17 \Delta s^{(-)}$ , т.е. будет равна  $2.2 + 0.17 \Delta s^{(-)}$ .

Параметр масштаба  $\lambda(s) \in I \subset R_+$  зависит от значений полуотклонений  $s^{(-)}, s^{(+)} \in R_+ = [0; +\infty]$ . При увеличении неопределенности, то есть с ростом разброса данных, параметр масштаба и абсолютные полуотклонения будут строго возрастать. Так как  $\lambda(s)$  и  $s^{(-)}(\lambda)$  связаны функциональной зависимостью (1.3.27), то функцию  $s(\lambda): R_+ \rightarrow I$  можно рассматривать как функцию, обратную функции  $\lambda(s): I \rightarrow R_+$ , то есть по определению обратной функции  $s^{(-)}(\lambda(s)) = s$ . Таким образом, чтобы определить функцию  $\lambda(s)$  необходимо найти функцию, обратную к  $s^{(-)}(\lambda)$ . В большинстве практических случаев, невозможно аналитически получить функцию  $\lambda(s)$ . В этом случае необходимо построить график функции  $s^{(-)}(\lambda)$  и аппроксимировать эту зависимость с помощью других более простых функций.

Талейб различает два вида хрупкости: локальную, т.е. собственную или встроенную, и приобретенную, т.е. унаследованную [4, 5].

*Локальной (собственной) хрупкостью* случайной величины  $X$  с ФПВ  $f(\lambda, x)$  на уровне стресса  $K^{(-)}$  и уровне полуотклонения  $s^{(-)}$  является  $K^{(-)}$  – чувствительность левого хвоста  $V(K^{(-)}, s^{(-)})$ .

Во многих практических случаях может оказаться, что  $\xi$  не является гладкой функцией от  $s^{(-)}$ . В этом случае используют конечно-разностную версию  $K$ -чувствительности:

$$\begin{aligned} V(K^{(-)}, s^{(-)}, \Delta s) &= \xi(K^{(-)}, s^{(-)} + \Delta s) - \xi(K^{(-)}, s^{(-)} - \Delta s) = \\ &= \int_{-\infty}^{K^{(-)}} (\Omega - x) \frac{f(\lambda(s^{(-)} + \Delta s), x) - f(\lambda(s^{(-)} - \Delta s), x)}{2\Delta s} dx, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

при  $\Delta s \rightarrow 0$ .

По сути, хрупкость дает возможность получить *фактическую степень влияния неопределенности на рассматриваемое распределение на заданном уровне  $K$* .

Как видно из определения хрупкости, ее можно вычислять для любых хвостов и распределений, то есть для этого не обязательно иметь распределение типа «прибыль–убытки».

Проведем анализ хрупкости на примере нормального распределения  $N(\mu, \sigma)$ . Для этого распределения:

$$s^{(-)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\sigma(s^{(-)}) = \sqrt{2\pi}s^{(-)}, \quad (1.4.3)$$

$$\xi(K^{(-)}, \mu, s^{(-)}) = 2\pi(s^{(-)})^2 f(K^{(-)}, \mu, \sqrt{2\pi}s^{(-)}) = s^{(-)} e^{-\frac{(K^{(-)} - \mu)^2}{4\pi(s^{(-)})^2}}.$$

Построим график функции  $\xi(K, \mu, s^{(-)})$ . Для простоты рассмотрим случай, когда математическое ожидание  $\mu = 0$ . Пример, что начальное значение среднеквадратичного отклонения (СКО)  $\sigma = 1$ , что соответствует  $s^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$ . Далее начальное  $s^{(-)}$  будем увеличивать с шагом 10% (0.04) до момента его увеличения на 400%, что соответствует увеличению начального значения  $s^{(-)}$  в пять раз. Рассмотрим три случая:  $K^{(-)} = -2, -3, -4$ . Полученный график представлен на рисунке 1.4.1.

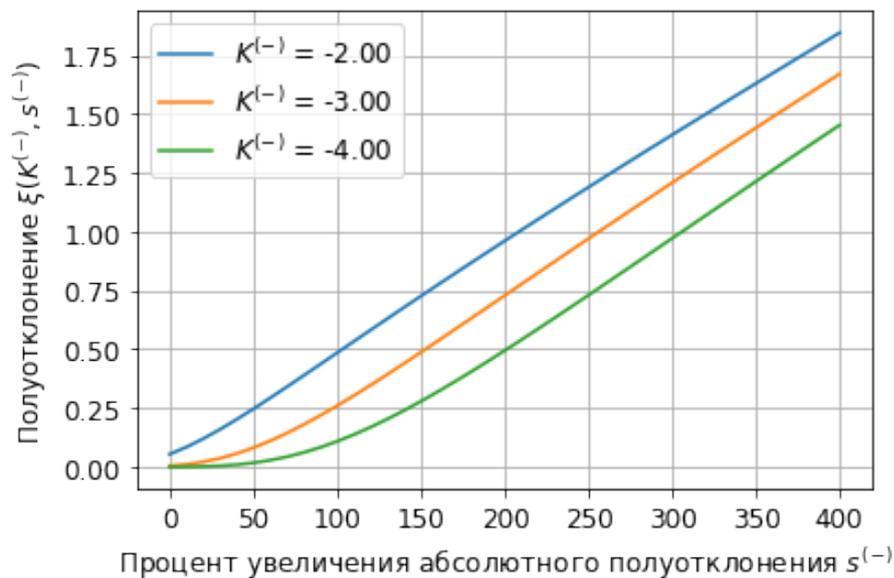


Рисунок 1.4.1 – График зависимости левого условного полутклонения  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  от процента увеличения начального значения левого абсолютного полутклонения  $s^{(-)}$

Запишем формулу хрупкости для нормального распределения:

$$V(K^{(-)}, s^{(-)}) = \frac{\partial \xi(K^{(-)}, \mu, s^{(-)})}{\partial s^{(-)}} = e^{-\frac{(K^{(-)} - \mu)^2}{4\pi(s^{(-)})^2}} \left[ 1 + \frac{(K^{(-)} - \mu)^2}{2\pi(s^{(-)})^2} \right]. \quad (1.4.4)$$

График хрупкости в зависимости от процента увеличения начального значения левого абсолютного полуотклонения  $s^{(-)}$  представлен на рисунке 1.4.2. Во всех случаях хрупкость имеет одинаковый максимум. Для  $K^{(-)} = -2$  он достигается при увеличении величины  $s^{(-)}$  на 100% (в два раза), для  $K^{(-)} = -3$  – при увеличении на 200% (в три раза) и для  $K^{(-)} = -4$  – при увеличении на 300% (в четыре раза). После достижения максимума график хрупкости (скорости) очень медленно начинает убывать, что в силу свойств производной, говорит о все большем и большем замедлении роста величины  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$ , при этом она увеличивается примерно на одинаковую величину. Это связано с тем, что площадь под левым хвостом ФПВ, в промежутке от  $(-\infty; K^{(-)})$  с увеличением неопределенности (коэффициента масштаба) увеличивается все меньше и меньше.

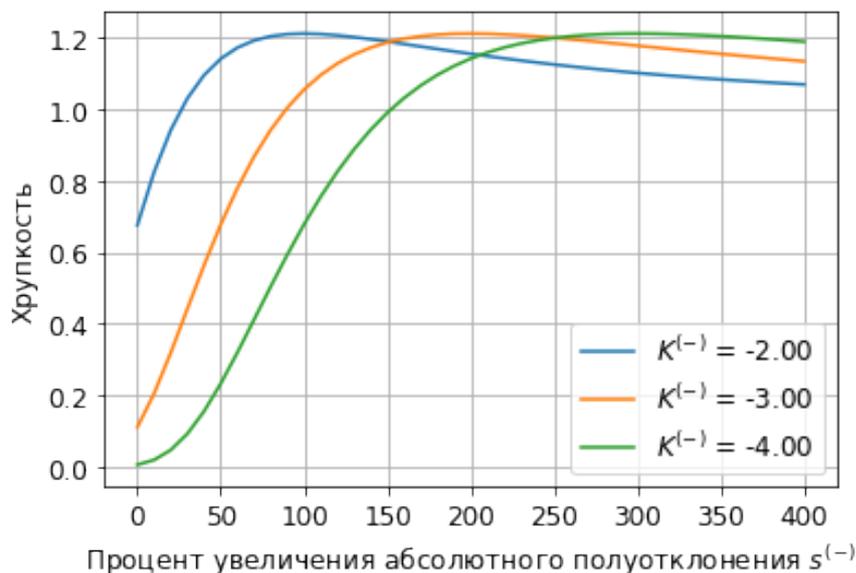


Рисунок 1.4.2 – График зависимости хрупкости  $V(K^{(-)}, s^{(-)})$  от процента увеличения начального значения левого абсолютного полуотклонения  $s^{(-)}$

Графически это представлено на рисунке 1.4.3. То есть до точки максимума хрупкости скорость утолщения левого хвоста резко возрастает и, следовательно, хрупкость быстро увеличивается. После достижения максимума, скорость утолщения хвоста замедляется и далее изменяется незначительно, почти на одну и ту же величину. Кроме того, кривая ФПВ становится все более и более линейной в промежутке от  $(-\infty; K^{(-)})$ . Таким образом, точку максимума хрупкости можно рассматривать как «особенную» точку, после достижения которой величина полуотклонения  $\xi(K^{(-)}, s^{(-)})$  увеличивается уже незначительно и примерно на одинаковую величину.

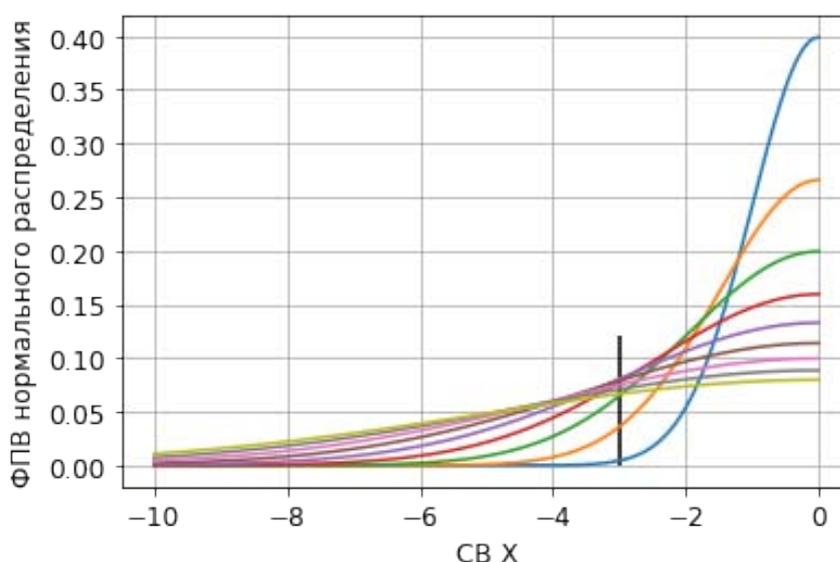


Рисунок 1.4.3 – Графическое представление утолщения хвоста ФПВ нормального распределения при росте коэффициента масштаба

Рассмотрим случай, когда случайная величина  $Y = \varphi(X)$  зависит от другого случайного источника риска  $X$ , который имеет ФПВ  $f(\lambda, x)$ . Если функция  $\varphi(x)$  монотонная, то ФПВ СВ  $Y$ :

$$g(\lambda, y) = \frac{f(\lambda, \varphi^{(-1)}(y))}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(y))}, \quad (1.4.5)$$

где

$x = \varphi^{(-1)}(y)$  – функция обратная  $\varphi(x)$ .

Обозначим  $\Omega_y = \varphi(\Omega)$  и  $u^{(-)}$  левое абсолютное полуотклонение  $Y$ . Для уровня стресса  $L = \varphi(K)$ , определим, как и в случае  $X$ :

$$\zeta(L, u^{(-)}(\lambda)) = \int_{-\infty}^L (\Omega_y - y) g(\lambda(s^{(-)}), y) dy.$$

Унаследованной хрупкостью  $Y$  относительно  $X$  на уровне стресса  $L$  и уровне полуотклонения  $s^{(-)}$  СВ  $X$  является частная производная:

$$V(L, s^{(-)}) = \frac{d\zeta}{ds^{(-)}}(L, u^{(-)}(\lambda)) = \left( \int_{-\infty}^L (\Omega_y - y) \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(-)}), y) dy \right) \frac{d\lambda}{ds^{(-)}}.$$

Здесь необходимо обратить внимание на то, что уровень стресса  $L$  и ФПВ определены для переменной  $Y$ , но параметром, по которому происходит дифференцирование, является левое полуабсолютное отклонение  $X$ ,  $s^{(-)}$ . Действительно, вначале для  $X$  находится левое абсолютное полуотклонение  $s^{(-)}$ , затем применяется функция  $Y = \varphi(X)$  и оценивается мера риска  $\zeta(L, u^{(-)}(\lambda))$ . Если при оценке  $s^{(-)}$  допущена ошибка, то ее влияние на меру риска  $Y$  усиливается соотношением, определяемым «унаследованной хрупкостью» [4, 5].

В рассматриваемом случае можно также сравнить локальные хрупкости СВ  $X$  и  $Y$ . Величина  $Y$  будет более хрупкой на уровне стресса  $L$  и левого полуотклонения  $u^{(-)}$ , чем случайная величина  $X$  при уровне  $K$  и левого полуотклонения  $s^{(-)}$ , если  $L$ -чувствительность  $V(L, s^{(-)})$  СВ  $Y$  больше, чем  $K$ -чувствительность  $V(K, s^{(-)})$  СВ  $X$ .

Рассмотрим понятие хрупкости на примере функции полезности теории перспектив (ТП) – теория в поведенческой экономике, описывающая поведение людей при принятии решений, связанных с рисками, при выборе среди вариантов с известными вероятностями. Она была разработана как описательная модель принятия решения в условиях неопределенности Нобелевским лауреатом психологом Даниэлем Канеманом и экономистом Амос Тверски [6]. Авторы провели серию экспериментов для того, чтобы идентифицировать манеру, в которой люди делают выбор в условиях риска. Теория гласит, что люди принимают решения, основываясь на потенциальном значении потерь и

выигрышей, а не на конечном финансовом результате, а также что люди оценивают эти потери и выигрыши, используя эвристику [17].

Авторы этой теории вывели *функцию субъективной полезности* (ФСП)  $v(r)$ , которая описывает поведенческое значение выигрышного/проигрышного исхода ситуации. Авторы *экспериментально* получили значение функции, которая зависит от начального значения отклонения  $r_0$ . Эта функция обычно асимметричная относительно референтной точки  $r_0$  (которая отражает различное отношение ЛПР к выигрышам и проигрышам), вогнутая в верхней части графика для выигрышей и выпуклая в нижней части графика для проигрышей. Более того, в целом функция полезности растет круче для проигрышей, чем для выигрышей. Математически она имеет следующий вид [6, 17]:

$$U(r) = \begin{cases} (r - r_0)^{\alpha}, & r \geq r_0, \\ -\lambda(r_0 - r)^{\alpha}, & r < r_0, \end{cases} \quad (1.4.6)$$

где

$\alpha = 0.88$  – коэффициент избегания риска относительно выигрышей и проигрышей,

$\lambda = 2.25$  – коэффициент избегания потерь, который подчеркивает разницу восприятия ЛПР выигрышей и проигрышей.

Пусть имеется распределение Стьюдента, которое описывает распределение СВ  $X$  типа «прибыль–убытки» с ФПВ

$$f(x) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha + x^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\alpha} \text{В}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)},$$

где

$\alpha = 2$  – параметр распределения.

Применим ФСП к нашему распределению прибыли и убытков. В нашем случае ФСП примет вид:

$$U(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & x \geq 0, \\ -\lambda(-x)^{\alpha}, & x < 0. \end{cases}$$

Так как ФСП зависит от случайной величины  $X$ , то используя формулу (1.4.2), несложно показать, что ФПВ СВ  $U(x)$  будет иметь вид

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{ax^{\frac{a-1}{a}} \left( \frac{\alpha}{\alpha + x^{\frac{a}{a}}} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\alpha} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)}, & x \geq 0, \\ \frac{\lambda a \left( -\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{a-1}{a}} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \left( -\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{a}{a}}} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\alpha} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)}, & x < 0. \end{cases}$$

На рисунке 1.4.4 представлены две ФПВ: распределения СВ  $X$  «прибыль–убытки» и ФПВ функции полезности. Видно, что левый хвост распределения СВ  $U(x)$  толще, чем у распределения «прибыль–убытки», т.е. оно более хрупкое.

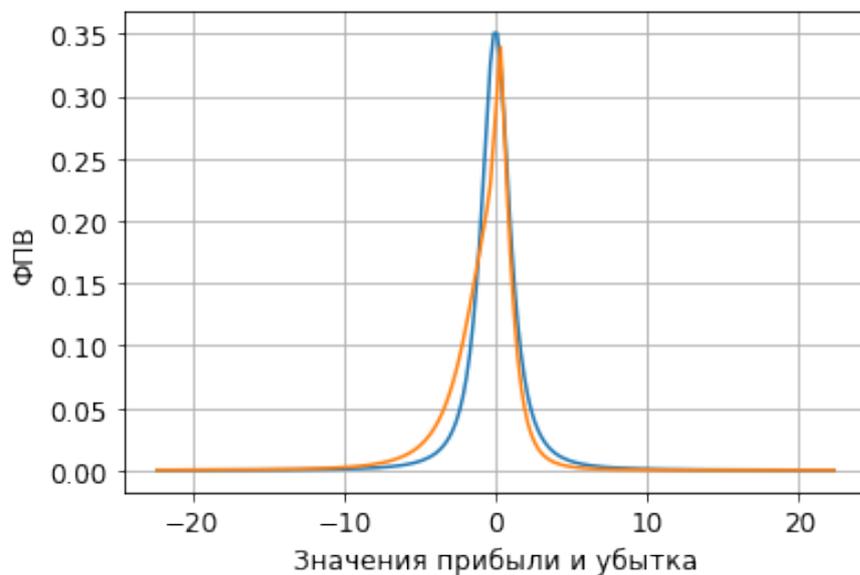


Рисунок 1.4.4 – ФПВ СВ  $U(x)$  (оранжевая линия) и СВ  $X$  «прибыль–убытки» (синяя линия)

## 1.5 Математическое описание антихрупкости

Антихрупкость – это не просто противоположность хрупкости применительно к правому хвосту распределения. Определение антихрупкости, с одной стороны, состоит из чувствительности *правого* хвоста к неопределенности, с другой стороны, требует робастности (устойчивости) распределения вероятностей в левой части. С этой точки зрения, в отличие от хрупкости, антихрупкость нельзя определить одной величиной.

Рассмотрим понятие робастности распределения. Пусть  $X$  – случайная величина с ФПВ  $f(\lambda, x)$ . Говорят, что  $f(\lambda, x)$  является  $b$ -робастной ниже уровня стресса  $K < \Omega$ , если  $V(K', s^{(-)}) \leq b$  для любого  $K' \leq K$ , то есть на полуинтервале  $(-\infty, K]$ . Таким образом,  $b$ -робастность на полуинтервале  $(-\infty, K]$  означает:

$$R_{(-\infty; K]}(K, s^{(-)}) = \max_{K' \leq K} V(K', s^{(-)}) \leq b.$$

Аналогично можно определить  $b$ -робастность на отрезке  $[K_1; K_2]$ :

$$R_{[K_1; K_2]}(K_1, K_2, s^{(-)}) = \max_{K_1 \leq K' \leq K_2} V(K', s^{(-)}) \leq b.$$

Заметим, что чем меньше  $R$ , тем робастнее (менее хрупкое) распределение  $f(\lambda, x)$ .

По сути, робастность определяет ограниченность хрупкости сверху для любого уровня  $K' \leq K$ . Математически это означает, что ФПВ хвоста распределения является монотонно убывающей функцией на полуинтервале  $(-\infty, K]$ , то есть хвост распределения не содержит никаких «всплесков» и выбросов. Это также соответствует случаю (см. пример выше), когда для разных значений  $K' \leq K$  хрупкость имеет одинаковое максимальное значение (ограниченность сверху).

Также можно определить  $b$ -робастность в случае конечно-разностной хрупкости  $V(K, s^{(-)}, \Delta s)$ .

Пусть распределение  $X$  является одномодальным, то есть ФПВ  $f(\lambda, x)$  является одновершинной функцией. Рассмотрим СВ  $Y = \varphi(X)$ , которая зависит от  $X$ . Функция

$y = \varphi(x)$  называется  $(a, b)$ -робастной ниже уровня стресса  $L = \varphi(K)$ , если для любого  $K' \leq K$  и  $L' = \varphi(K')$  выполняется неравенство:

$$V(L', s^{(-)}) \leq aV(K', s^{(-)}) + b,$$

где

$V(L', s^{(-)})$  – унаследованная хрупкость  $Y$  относительно  $X$  на уровне стресса  $L'$ ,

$V(K', s^{(-)})$  – локальная хрупкость случайной величины  $X$  на уровне стресса  $K'$ .

Определим меру чувствительности для правого хвоста для  $H > L > \Omega$ :

$$\xi(L, H, s^{(+)}) = \int_L^H (x - \Omega) f(\lambda(s^{(+)}), x) dx,$$

$$W(L, H, s^{(+)}) = \frac{\partial \xi}{\partial s^{(+)}}(L, H, s^{(+)}) = \frac{\int_L^H (x - \Omega) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(+)}), x) dx}{\int_{\Omega}^{+\infty} (x - \Omega) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(+)}), x) dx}.$$

Для  $Y = \varphi(X)$ , зависящей от  $X$ , имеем:

$$W'(\varphi(L), \varphi(H), s^{(+)}) = \frac{\int_{\varphi(L)}^{\varphi(H)} (y - \varphi(\Omega)) \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(+)}), x) dx}{\int_{\Omega}^{+\infty} (x - \Omega) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda(s^{(+)}), x) dx}.$$

Тогда  $Y = \varphi(X)$  является локально антихрупкой на отрезке  $[L; H]$ , если выполнены следующие условия:

- 1)  $Y$  является  $b$ -робастной ниже уровня  $\Omega$  для некоторого  $b > 0$ ,
- 2)  $W'(\varphi(L), \varphi(H), s^{(+)}) \geq aW(L, H, s^{(+)})$ ,

где  $a = \frac{u^{(+)}(\lambda)}{s^{(+)}(\lambda)}$ ,  $u^{(+)}$  – правое абсолютное полуотклонение  $Y$ .

По сути локальная антихрупкость означает, что на отрезке  $[L; H]$  правый хвост распределения СВ  $Y$  толще, чем правый хвост распределения  $X$ .

## 1.6 Особенности применения хрупкости/антихрупкости к техническим системами конструкциям

Исходя из определения хрупкости и антихрупкости, можно сделать следующие выводы.

Антихрупкость определена только для функциональной нелинейной зависимости  $Y = \varphi(X)$  (унаследованная антихрупкость), причем распределение СВ  $X$  должно быть одномодальным, а его ФПВ дифференцируемой.

Антихрупкость применяется *только* к распределениям вида «прибыль–убытки», так как в ее определении рассматривается чувствительность обоих хвостов распределения. Таким образом, понятие антихрупкости можно применить для управления эксплуатацией технического объекта, приносящего доход/прибыль при возможности построения ФПВ вида «прибыль–убытки».

Хрупкость, в отличие от антихрупкости, является самостоятельным понятием и может быть использована для любых одномодальных распределений и любого его хвоста, представляющего убытки/потери или другие критические значения для рассматриваемого объекта. Например, при анализе риска технических систем в основном используются кривые распределения потерь, где убытки описываются положительными числами и рассматривается уже правый хвост распределения.

Современные технические системы проектируются в той или иной степени хрупкими [17]. *Хрупкость, в контексте рассматриваемой проблемы, заключается в неправильном расчете риска от масштабных негативных событий. Это так называемая «хрупкость моделирования».* То есть системы «хрупки» к неточности оценки распределения стрессоров, а, следовательно, к ошибкам моделирования, т.к. эта неточность увеличивает вероятность выхода нагрузок и воздействий за проектные границы, приводя к большей вероятности разрушения системы. С помощью хрупкости можно измерить нелинейную реакцию на изменение параметра модели, сопоставляя хрупкость с ошибкой модели. Например, небольшое возмущение параметров, входящих в ФПВ, провоцируют значительное увеличение вероятности негативного события (выпуклый отклик). Проиллюстрировать это можно следующим образом: *если система сильнее повреждается стрессором интенсивностью  $n \cdot Z$ , чем стрессором интенсивностью*

$Z$ , приложенным  $n$  раз – вплоть до разрушения (т.е. реакция системы на стресс нелинейна), то такая система особенно уязвима к экстремальным событиям и к ошибкам их прогнозировании.

Вопрос построения ФПВ потерь при конкретном сценарии развития события является достаточно сложным. Для этого необходимо рассматривать риск  $R$  (возможный убыток) как вероятность  $P_f$  возникновения события отказов, аварий и катастроф умноженную на ущерб  $C$  от последствий возникновения этих событий:

$$R = P_f C, \quad (1.6.1)$$

При анализе риска конструкций вероятность  $P_f$  и ущерб  $C$  можно рассматривать как случайные величины, которые имеют свои плотности распределения  $f_{P_f}(p), f_C(c)$ . Ущерб  $C$  есть случайная величина, а вероятность события  $P_f$  также может считаться случайной величиной, потому что оценивается с некоторой степенью достоверности по ограниченной выборке (например, по статистике аварий). Тогда имеем систему двух случайных величин с заданными распределениями и можно найти совместное распределение  $f_{P_f C}(p, c)$ . Если СВ  $P_f$  и  $C$  независимы, то функция распределения и ФПВ риска  $R$  имеет вид

$$F_R(r) = P(R < r) = \iint_{\Omega} f_{P_f C}(p, c) dc dp = \int_0^1 \int_0^{r/p} f_{P_f}(p) f_C(c) dc dp, \quad (1.6.2)$$

$$f_R(r) = \int_0^1 f_{P_f}(p) f_C\left(\frac{r}{p}\right) dp.$$

Таким образом, зная законы распределения вероятности возникновения аварии и распределение ущерба от этого события, можно найти распределение риска.

В случае если вероятность отказа, аварии или катастрофы не является случайной величиной  $P_f$ , то риск можно рассчитать по формуле

$$R = P_f \int_{\Omega} c f_C(c) dc, \quad (1.6.3)$$

где интегрирование производится по всей области  $\Omega$  ущербов.

С помощью хрупкости можно производить анализ чувствительности модели к ошибкам (или изменениям) в исходных данных, а также сравнивать две модели по критерию хрупкости.

В качестве примера рассмотрим годовые потери от штормов и пожаров в небольшом приморском городе, которые являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами со средними значениями 1.5 и 2.4 млн. руб. соответственно. Найдем вероятность того, что максимальные ущербы от штормов и пожаров будут больше, чем 3 млн.

У экспоненциального распределения ФПВ и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, \quad (1.6.4)$$

где

$\lambda$  – параметр распределения (интенсивность).

Пусть СВ  $X, Y$  – годовые потери от штормов и пожаров соответственно,  $U = \max(X, Y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(U > c) &= 1 - P(U \leq c) = 1 - P(X \leq c, Y \leq c) = \\ &= 1 - P(X \leq c)P(Y \leq c) = 1 - F_1(c)F_2(c). \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

где

$F_1(x), F_2(x)$  – функции распределения СВ  $X$  и  $Y$  соответственно:

$$F_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}, F_2(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{1.5} = 0.667, \lambda_2 = \frac{1}{2.4} = 0.417.$$

Предположим, что мы не уверены в правильной оценке параметров  $\lambda_1, \lambda_2$ , т.е. они однозначно не определены. Тогда будем рассматривать параметры  $\lambda_1, \lambda_2$  как случайные величины. В этом случае мы получим составное распределение вероятностей (compound probability distribution) – распределение вероятности, которое возникает в результате предположения, что у СВ  $X$  с ФПВ  $f_X(x, \theta)$  параметр  $\theta$  является случайной величиной с

ФПВ  $g_\theta(x)$ . В результате соединения  $f$  с  $g$  возникает новое распределение  $h$ , которое называется безусловным или составным распределением. Распределение параметра  $g_\theta(x)$  называют смешивающим или латентным распределением. Формально, безусловное распределение  $h$  возникает в результате маргинализации над  $g$ , т.е. от объединения исходного распределения с распределением параметра  $\theta$ . Исходное распределение  $f_X(x, \theta)$  называют условным распределением. Составное распределение  $h$  во многом похоже на исходное распределение  $f$ , которое его создало, но, как правило, имеет большую дисперсию и, часто, тяжелые хвосты. Безусловное распределение СВ  $X$  представляет собой средневзвешенное значение ФПВ  $f(x, \theta)$ , где вес представляет собой ФПВ случайного параметра  $\theta$  (смешивающий вес):

$$h_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x, \theta) g_\theta(\theta) d\theta. \quad (1.6.5)$$

Безусловной функцией распределения параметра  $\theta$  будет функция вида

$$H_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x, \theta) g_\theta(\theta) d\theta, \quad (1.6.6)$$

где

$F_X(x, \theta)$  – условная функция распределения СВ  $X$ .

Предположим, что СВ  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют Гамма распределение с ФПВ  $g_1(x), g_2(x)$  соответственно:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{\beta_1^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 x}}{\Gamma(\alpha_1)}, \\ g_2(x) &= \frac{\beta_2^{\alpha_2} x^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2 x}}{\Gamma(\alpha_2)}, \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

где

$\alpha_1, \beta_1$  – параметры распределения СВ  $\lambda_1$ ,

$\alpha_2, \beta_2$  – параметры распределения СВ  $\lambda_2$ .

Тогда ФПВ и ИФР (функция распределения) безусловного распределения СВ  $X$ :

$$\begin{aligned}
 h_X(x) &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{\beta_1^{\alpha_1} \lambda_1^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 \lambda_1}}{\Gamma(\alpha_1)} d\lambda_1 = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} e^{-(x+\beta_1)\lambda_1} \lambda_1^{\alpha_1} d\lambda_1 = \\
 &= \frac{\beta_1^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)}{\Gamma(\alpha_1) (x + \beta_1)^{\alpha_1+1}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} (x + \beta_1)^{\alpha_1+1} e^{-(x+\beta_1)\lambda_1} \lambda_1^{\alpha_1} d\lambda_1 = \\
 &= \frac{\beta_1^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)}{\Gamma(\alpha_1) (x + \beta_1)^{\alpha_1+1}} = \frac{\alpha_1 \beta_1^{\alpha_1}}{(x + \beta_1)^{\alpha_1+1}}, \\
 H_X(x) &= \int_0^x \frac{\alpha_1 \beta_1^{\alpha_1}}{(t + \beta_1)^{\alpha_1+1}} dt = 1 - \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{(x + \beta_1)^{\alpha_1}}.
 \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

Таким образом, безусловное распределение СВ  $X$  является *толстохвостым* распределением Ломакса (Lomax) для распределения Парето типа I.

Аналогично ФПВ и функция распределения безусловного распределения СВ  $Y$

$$\begin{aligned}
 h_Y(y) &= \frac{\alpha_2 \beta_2^{\alpha_2}}{(y + \beta_2)^{\alpha_2+1}}, \\
 H_Y(y) &= 1 - \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{(y + \beta_2)^{\alpha_2}}.
 \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Предположим, что среднее  $M$  и СКО  $S$  СВ  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
 M(\lambda_1) &= \lambda_1, \quad M(\lambda_2) = \lambda_2, \\
 S(\lambda_1) &= 0.5 \cdot \lambda_1, \quad S(\lambda_2) = 0.7 \cdot \lambda_2.
 \end{aligned}$$

Параметры Гамма распределения оценим с помощью решения системы уравнений:

$$\begin{cases} M = \frac{\alpha}{\beta}, \\ S^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}. \end{cases}$$

Получили, что  $\alpha_1 = 3.99, \beta_1 = 5.99; \alpha_2 = 2.04, \beta_2 = 4.89$ .

Графики ФПВ СВ  $X$  (ущерб от штормов) и  $Y$  (ущерб от пожаров) при их экспоненциальном распределении и распределении Ломакса представлены на рисунках 1.6.1, 1.6.2. Видно, что распределение Ломакса меньшим значения ставит в соответствие меньшие вероятности, а бо́льшим – бо́льшие вероятности, что и делает его толстохвостым.

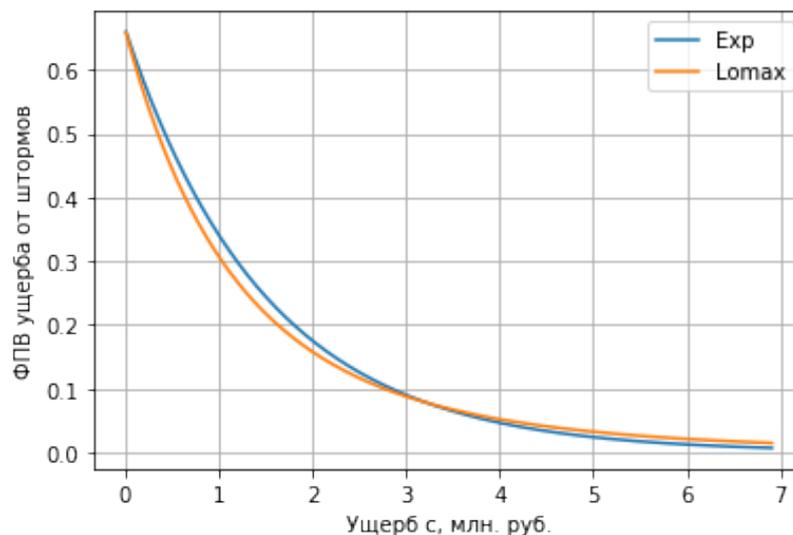


Рисунок 1.6.1 – ФПВ СВ  $X$  при экспоненциальном распределении и распределении Ломакса

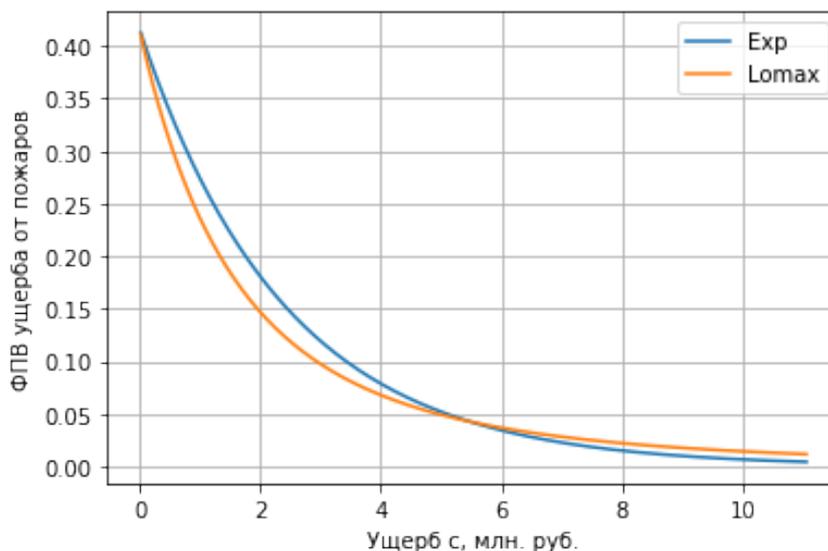


Рисунок 1.6.2 – ФПВ СВ  $Y$  при экспоненциальном распределении и распределении Ломакса

Тогда по формуле (1.6.5), вероятность того, что максимальный из этих ущербов будет больше, чем 3 млн. руб.:

без учета неопределенности при оценке параметров распределения  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$P(U > 3) = 1 - (1 - e^{-0.667 \cdot 3})(1 - e^{-0.417 \cdot 3}) \approx 0.383,$$

с учетом неопределенности при оценке параметров распределения  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$P^*(U > 3) = 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{(3 + \beta_1)^{\alpha_1}}\right) \left(1 - \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{(3 + \beta_2)^{\alpha_2}}\right) \approx 0.5,$$

Графики функций  $P(U > c), P^*(U > c)$  в зависимости от величины  $c$  представлены на рисунке 1.6.3.

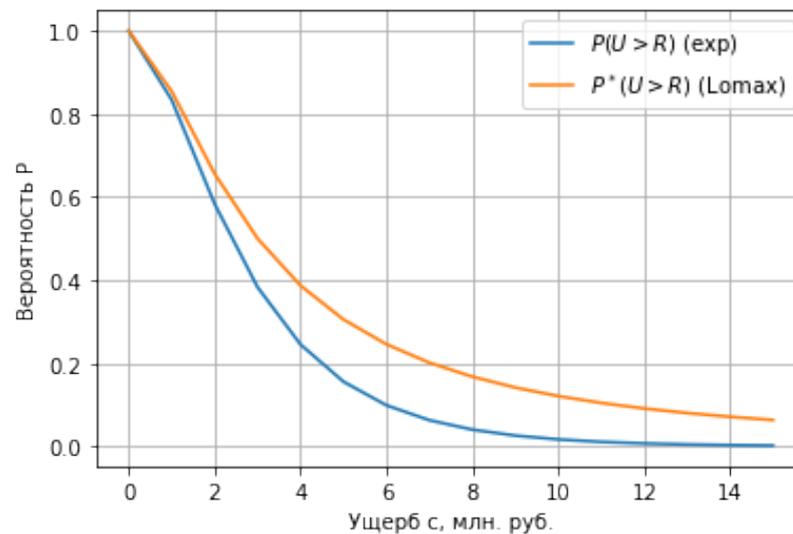


Рисунок 1.6.3 – Вероятность того, что максимальный из ущербов превысит  $c$  млн. руб.

Из рисунка 1.6.3 видно, что вероятности примерно совпадают только для  $0 \leq c \leq 1$  млн. руб. С увеличением величины  $c$  распределение Ломакса дает бо'льшую вероятность превышения, чем экспоненциальное распределение.

При эксплуатации сложной технической системы, как бы тщательно ни проводились расчеты при ее проектировании, всегда будут, в силу ее сложности, непредусмотренные заранее воздействия, обусловленные запроектными (экстремальными) нагрузками, что в конечном итоге будет приводить к ее локальным повреждениям. При этом очень важно знать, вызовут ли указанные повреждения катастрофическое разрушение системы в целом или ее непригодность к дальнейшей эксплуатации. Такие запроектные или экстремальные нагрузки и воздействия приходится

на хвосты распределений, которые описываются толстохвостыми распределениями. Пример такого распределения приведен на рисунке 1.6.4.

Распределение, представленное на рисунке 1.6.4 разделено на две части: центральную (сплошная жирная линия) и хвостовую (пунктирная жирная линия). Граница разделения  $K$  представляет собой пороговое значение, определяемое спецификой задачи. Центральная часть представляет собой значения при проектном нагружении (нормальная эксплуатация), хвостовая – запроектные значения. Центральная часть обычно описывается стандартными классами распределений (экспоненциальное, Вейбулла, Релея, логнормальное и т.д.), хвостовая часть – степенными распределениями или распределениями, имеющими тяжелые хвосты.

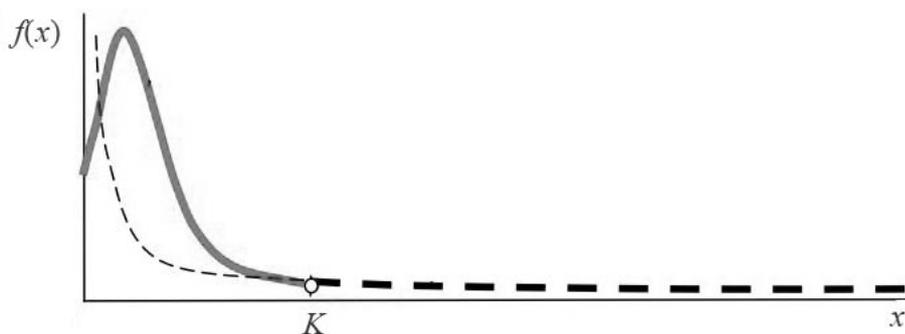


Рисунок 1.6.4 – Пример распределения воздействия, нагрузки или ущерба

Ниже рассмотрено применение  $k$ -статистики Каниадакиса [7–9] (*неэкстенсивной* статистической механики), которая возникла в рамках специальной теории относительности Эйнштейна в 2001 г. Используется  $k$ -деформированная экспоненциальная функция Каниадакиса, с помощью которой вводятся новые классы статистических  $k$ -деформированных версий уже известных распределений. Эти распределения совпадают с исходными, однако их  $k$ -деформированный хвост следует степенному закону Парето. Это позволяет превращать исходные распределения в распределения с тяжелыми хвостами, которые более точно соответствуют экспериментальным данным смешанных систем, эксплуатирующихся в условиях повышенной неопределенности. Это позволяет в рамках уже известных распределений нагрузок и воздействий моделировать сверхнормативные стрессоры в хвостах этих распределений и анализировать последствия внепроектных ситуаций, в том числе, катастроф по типу «черный лебедь» (*труднопрогнозируемых и редких со значительными последствиями*). Использование  $k$ -статистики позволяет получить простые аналитические

выражения в замкнутой форме для всех основных статистических функций, таких как функция плотности вероятности, функция распределения, функция выживания, функция квантилей, функция риска и кумулятивная функция риска. Рассмотрим подробнее данный подход.

Рассмотрим СВХ с ФПВ  $f(x)$ . В статистической механике общее уравнение скорости изменения  $f(t)$  – это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка:

$$\frac{df(x)}{dx} = -r(x)f(x), \quad (1.6.10)$$

где

$r(x)$  – функция скорости затухания.

Решение этого ОДУ является экспоненциальным

$$f(t) = c \exp\left(-\int_{x_0}^x r(t) dt\right), \quad (1.6.11)$$

со стандартным условием нормировки, определяющим константу  $c$ :

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = 1 \quad (1.6.12)$$

В качестве экспоненциального решения рассмотрим три простых случая.

1. *Экспоненциальная модель* для постоянной скорости затухания, т.е.:

$$r(x) = \lambda, \quad (1.6.13)$$

что из уравнения (1.6.10) приводит к экспоненциальной ФПВ

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (1.6.14)$$

2. Распределение Парето I типа. ФПВ распределения Парето получается из уравнения (1.6.10) при функции скорости затухания, равной

$$r(x) = \frac{p}{x}, \quad p > 1, \quad (1.6.15)$$

т.е. ФПВ в этом случае:

$$f(x) = \frac{p-1}{x_0} \left( \frac{x_0}{x} \right)^p, \quad p > 1, \quad x \in (x_0, +\infty), \quad x_0 > 0. \quad (1.6.16)$$

3.  $\kappa$ -экспоненциальная модель [5–7] оказалась полезной во многих приложениях. Согласно [7–9], экспериментальные данные свидетельствуют о том, что функции плотности вероятности должны напоминать экспоненциальную функцию для  $x \rightarrow 0$ . Однако при  $x \rightarrow 0$  ФПВ Парето расходится. С другой стороны, для высоких значений  $x$  многие экспериментальные результаты показывают Парето подобную ФПВ со степенными хвостами вместо хвостов с экспоненциальным затуханием. Следовательно, при  $x \rightarrow 0$  следует, что  $r(x) \sim \beta$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  следует, что  $r(x) \sim p/x$ . Таким образом, фактическая функция скорости затухания  $r(x)$  должна плавно интерполироваться между этими двумя режимами. Хорошее предложение для  $r(x)$  было введено в контексте специальной теории относительности, где функция  $r(t)$  задается через фактор Лоренца

$$\gamma_\kappa(q) = \sqrt{1 + \kappa^2 q^2}. \quad (1.6.17)$$

Это выражение включает безразмерный импульс  $q$ , где параметр  $\kappa$  является обратной величиной безразмерной скорости света  $c$ , т.е.  $\kappa \propto 1/c$ . Тогда принимая

$$r(x) = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^2}}, \quad (1.6.18)$$

получим, при  $x \rightarrow 0$  скорость затухания  $r(x)$  соответствует экспоненциальному распределению, т.е.  $r(x) \sim \beta$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  соответствует распределению Парето, т.е.  $r(x) \sim 1/\kappa x$ .

Решение ОДУ (6.10) приводит к следующей ФПВ:

$$f(x) = \beta(1 - \kappa^2) \exp_{\kappa}(-\beta x), \quad (1.6.19)$$

где  $\kappa$ -деформированная экспоненциальная функция задается выражением

$$\exp_{\kappa}(x) = \left( \sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x \right)^{1/\kappa}. \quad (1.6.20)$$

при  $0 < \kappa < 1$ .

Важно отметить, что при  $\kappa \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow 0$  функция  $\exp_{\kappa}(x)$  стремится к обычной экспоненте, т.е.

$$\begin{aligned} \exp_{\kappa}(x) &\underset{\kappa \rightarrow 0}{\sim} \exp(x), \\ \exp_{\kappa}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \exp(x). \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

С другой стороны, функция  $\exp_{\kappa}(-x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  представляет собой степенной хвост, т.е.

$$\exp_{\kappa}(-x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (2\kappa x)^{-1/\kappa}. \quad (1.6.22)$$

Кроме того,  $\kappa$ -экспонента удовлетворяет следующему тождеству

$$\exp_{\kappa}(x) \exp_{\kappa}(-x) = 1. \quad (1.6.23)$$

по аналогии со стандартной, недеформированной, экспонентой.

$\kappa$ -экспонента представляет собой очень мощный инструмент, который можно использовать для формулирования обобщенной статистической теории, способной рассматривать системы, описываемые функциями распределения, имеющими степенные хвосты.

Рассмотрим применение  $\kappa$ -статистики Каниадакиса к распределению Вейбулла. Согласно [18],  $\kappa$ -деформированная функция распределения Вейбулла:

$$F(x) = 1 - \exp_{\kappa} \left( - \left( x / \tau \right)^{\alpha} \right), x \geq 0, \alpha, \tau, \kappa > 0, \quad (1.6.24)$$

где

$\alpha$  – параметр формы,

$\tau$  – параметр масштаба.

Сделаем замену  $\beta = \tau^{-\alpha}$ . Несложно получить к-деформированную ФПВ Вейбулла:

$$\begin{aligned}
 f_{\kappa}(x) &= \frac{dF_{\kappa}(x)}{dx} = \frac{e_{\kappa}(-\beta t^{\alpha}) \left( \alpha \beta \kappa x^{\alpha-1} - \frac{\alpha \beta^2 \kappa^2 x^{2\alpha-1}}{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}}} \right)}{\kappa \left( \sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}} - \beta \kappa x^{\alpha} \right)} \\
 &= \frac{e_{\kappa}(-\beta t^{\alpha}) \alpha \beta \kappa x^{\alpha-1} \left( 1 - \frac{\beta \kappa x^{\alpha}}{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}}} \right)}{\kappa \beta \kappa x^{\alpha} \left( \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}}}{\beta \kappa x^{\alpha}} - 1 \right)}.
 \end{aligned} \tag{1.6.25}$$

Сделаем замену  $y = \frac{\alpha \beta^2 \kappa^2 x^{2\alpha-1}}{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}}}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 f_{\kappa}(x) &= \frac{e_{\kappa}(-\beta x^{\alpha}) \alpha \beta \kappa x^{\alpha-1} (1-y)}{\kappa \beta \kappa x^{\alpha} \left( \frac{1-y}{y} \right)} = \frac{e_{\kappa}(-\beta x^{\alpha}) \alpha \beta \kappa x^{\alpha-1} y}{\kappa \beta \kappa x^{\alpha}} = \\
 &= \frac{e_{\kappa}(-\beta x^{\alpha}) \alpha \beta x^{\alpha-1}}{\sqrt{1 + \kappa^2 \beta^2 x^{2\alpha}}} = \frac{\alpha (x/\tau)^{\alpha-1} e_{\kappa}(-(x/\tau)^{\alpha})}{\tau \sqrt{1 + \kappa^2 (x/\tau)^{2\alpha}}}.
 \end{aligned} \tag{1.6.26}$$

Параметр формы (показатель степени)  $\alpha$  количественно характеризует кривизну (форму) распределения, которая менее (более) выражена при меньших (больших) значениях параметра. Параметр  $\tau$  является параметром масштаба: если  $\tau$  мало, то распределение будет *более сконцентрированным* вокруг моды; если  $\tau$  большое, то распределение будет менее сконцентрированным более рассеянным. Наконец, параметр  $\kappa$  характеризует измеряет тяжесть правого хвоста: чем больше (меньше) его величина, тем толще (тоньше) хвост. При  $\kappa \rightarrow 0$  распределение стремится к обычному распределению Вейбулла. Можно легко убедиться, что

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa \rightarrow 0} f_{\kappa}(x, \alpha, \tau, \kappa) &= \frac{\alpha}{\tau} \left( \frac{x}{\tau} \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(x/\tau\right)^{\alpha}\right), \\ \lim_{\kappa \rightarrow 0} F_{\kappa}(x, \alpha, \tau, \kappa) &= 1 - \exp\left(-\left(x/\tau\right)^{\alpha}\right).\end{aligned}\tag{1.6.27}$$

Поскольку экспоненциальное распределение является частным случаем Вейбулла с параметром формы, равным 1, то при  $\kappa \rightarrow 0$  и  $\alpha = 1$   $\kappa$ -деформированные функции стремятся к экспоненциальному закону. При  $x \rightarrow 0+$  распределение ведет себя аналогично модели Вейбулла, тогда как для больших значений  $x$  приближается к распределению Парето с параметром масштаба  $\tau(2\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}$  и параметром формы  $\frac{\alpha}{\kappa}$ , т.е.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\kappa}(x, \alpha, \tau, \kappa) &= \frac{\frac{\alpha}{\kappa} \left( \tau(2\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{x^{\frac{\alpha}{\kappa}+1}}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\kappa}(x, \alpha, \tau, \kappa) &= 1 - \left( \frac{\tau(2\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}}{x} \right)^{\frac{\alpha}{\kappa}}.\end{aligned}\tag{1.6.28}$$

Из выражения (1.6.24) можно найти функцию квантилей (обратную функцию распределения) и функцию выживания (надежности):

$$\begin{aligned}F_{\kappa}^{-1}(u, \alpha, \tau, \kappa) &= \tau \left( \ln_{\kappa} \frac{1}{1-u} \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < u < 1, \\ S(u, \alpha, \tau, \kappa) &= \exp_{\kappa} \left( -\left(x/\tau\right)^{\alpha} \right),\end{aligned}$$

где

$\kappa$ -логарифм  $\ln_{\kappa}(u)$  является обратной функцией  $\exp_{\kappa}(u)$ , т.е.

$$\ln_{\kappa}(\exp_{\kappa}(u)) = \exp_{\kappa}(\ln_{\kappa}(u)) = u,$$

и определяется формулой

$$\ln_{\kappa}(u) = \frac{u^{\kappa} - u^{-\kappa}}{2\kappa}.$$

Медиана

$$x_{med} = \tau \left[ \ln_{\kappa}(2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} = \tau \left[ \frac{2^{\kappa} - 2^{-\kappa}}{2\kappa} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Мода  $x_M$  плотности вероятности может быть получена аналитически как функция параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\kappa$ . Так  $x_M$  – точка максимума ФПВ, то приравнивая производную ФПВ нулю, можно, после ряда тождественных преобразований, найти параметр  $\kappa$  как функцию параметров  $\alpha, \beta, x_M$ :

$$\kappa = \frac{1}{X_M} \sqrt{(\alpha - 1) + \frac{\alpha^2 X_M^2}{2} + \alpha X_M \sqrt{\frac{\alpha^2 X_M^2}{4} + \alpha}}, \quad (1.6.29)$$

где

$$X_M = \beta x_M^{\alpha}.$$

Выражение (1.6.29) очень полезно при анализе эмпирических данных. Например, по выборке данных можно оценить параметры обычного распределения Вейбулла с помощью решения системы уравнений:

$$\begin{cases} M = \tau \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \\ D = \tau^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\frac{M}{\tau}\right)^2 \right], \end{cases} \quad (1.6.30)$$

где

$M$  – выборочное среднее,

$D$  – выборочная дисперсия.

Тогда параметр формы  $\alpha$  можно найти из уравнения:

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}=1+\frac{D}{M^2}. \quad (1.6.31)$$

Далее необходимо оценить моду:

$$x_M = \begin{cases} \tau\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/\alpha}, & \alpha > 1, \\ 0, & \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (1.6.32)$$

Окончательно, найдя параметры  $\beta = \tau^{-\alpha}$ ,  $X_M = \beta x_M^\alpha$  и подставив их в формулу (1.6.29), определим параметр  $\kappa$ .

В качестве второго примера рассмотрим результаты анализа [19] скорости ветра на высокогорном участке Хопок, расположенном в Низких Татрах – горном массиве центральной части Словакии. Анализируемые данные о скорости ветра были собраны за 11-летний период (2005–2015 гг.) и измерены на высоте 10 м над землей с помощью калиброванных анемометров.

В [19] было установлено, что ФПВ годовых скоростей ветра хорошо аппроксимируется распределением Вейбулла со следующими параметрами:

$$S(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right),$$

где

$\alpha = 1.63$  – параметр формы,

$\tau = 9.26$  – параметр масштаба.

Известно, что параметр формы Вейбулла  $\alpha$  для общемирового распределения скорости ветра обычно колеблется от 1,5 до 3 [19]. Значение параметра формы  $\alpha$  можно рассматривать как показатель стабильности скорости ветра. Высокое значение  $\alpha$  (2.5–4) указывает на более стабильную скорость ветра, а более низкое значение  $\alpha$  (1.5–2) указывает на высокую изменчивость скорости ветра (например, места с порывистым ветром).

Используя формулу (1.6.32) найдем моду  $x_M$ :

$$x_M = 5.16 \text{ м/с.}$$

В нашем случае  $\beta = \tau^{-\alpha} = 0.0265$ . По формуле (1.6.37) найдем, что параметр  $\kappa = 3.33$ .

ФПВ годовой скорости ветра для обычного и  $\kappa$ -деформированного распределения Вейбулла представлена на рисунке 1.6.5.

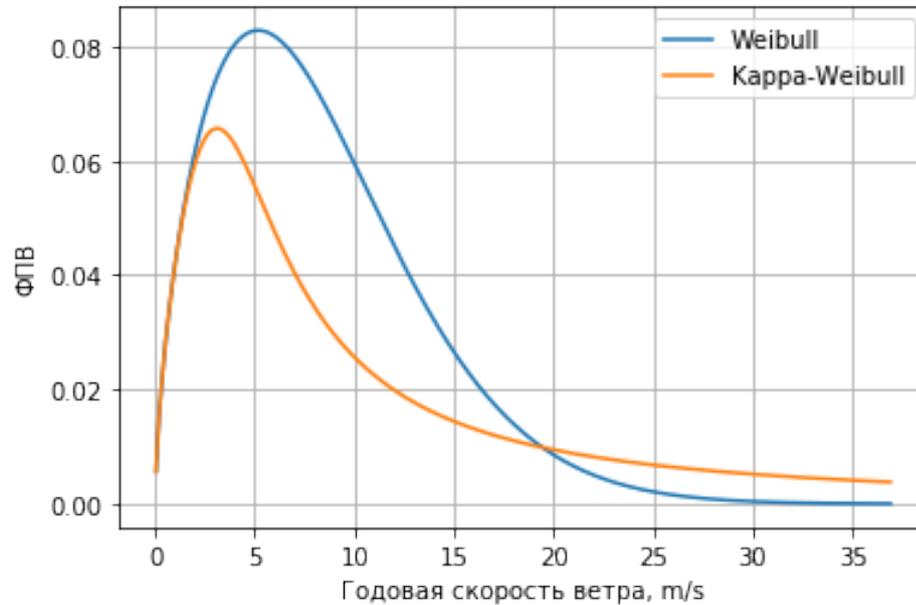


Рисунок 1.6.5 – ФПВ годовой скорости ветра для обычного и  $\kappa$ -деформированного распределения Вейбулла

Как и следовало ожидать  $\kappa$ -деформированная ФПВ имеет тяжелый хвост.

Найдем вероятность того, что годовая скорость ветра  $V$  превысит заданное значение  $v$ , то есть

$$P(V > v) = 1 - F(v).$$

Для нашего примера имеем:

$$P(V > v) = \exp(-\beta x^\alpha),$$

$$P_\kappa(V > v) = \exp_\kappa(-\beta x^\alpha).$$

Графики функций  $P(V > v)$ ,  $P_{\kappa}(V > v)$  представлены на рисунке 1.6.6, из которого видно, что вероятности превышений совпадают примерно до значения 4 м/с. Сверх этого значения вероятность превышения при  $\kappa$ -деформированном распределении больше вероятности, чем при обычном распределении Вейбулла. Например, вероятность того, что годовая скорость ветра  $V$  превысит 10 м/с равна 0.322 при обычном распределении Вейбулла, и 0.542 при  $\kappa$ -деформированном распределении Вейбулла.

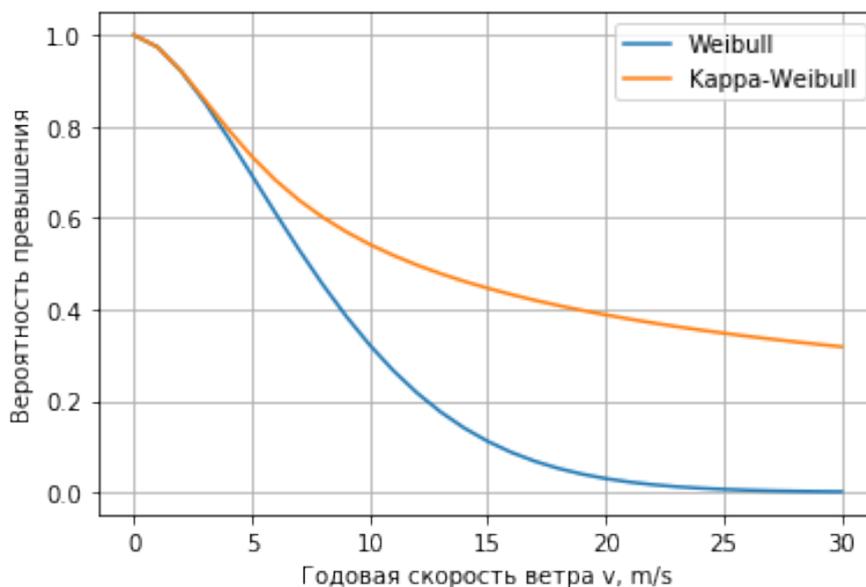


Рисунок 1.6.6 – Вероятность того, что годовая скорость ветра превысит значение  $v$

## 1.7 Заключение к разделу 1

Полученные результаты позволяют дать предварительные ответы на поставленные в отчете вопросы о степени применимости теории антихрупкости при оценке риска эксплуатации киберфизических инфраструктур и систем.

Ответ на первый вопрос выглядит следующим образом:

С чисто теоретических позиций математики, работающей, как известно, по схеме «если–то», концепция антихрупкости может считаться универсальной. С позиций практической пользы применимость концепции целиком зиждется на принципиальной доступности статистической информации о тяжелых хвостах рассматриваемых распределений. Если они доступны, теория применима. В противном случае – абсолютно нет.

Для реализации концепции антихрупкости объектов второй природы и получения ответов на остальные вопросы необходимо провести дополнительное исследование в тех областях современной инженерии, где возможно получение обширной статистики непрерывно пополняемой с течением времени. Без ее наличия или скудости, теория (финансовой) антихрупкости останется практически неприменимой для киберфизических объектов, или будет содержать большие неопределенности, обесценивающие полученные результаты.

## 2 Разработка методов, ускоряющих процедуру статистического моделирования при расчете показателей балансовой надежности распределительных сетей с возобновляемыми источниками энергии

### 2.1 Введение

Несмотря на наблюдаемое в конце XX века бурное развитие теории надежности электроэнергетических систем (ЭЭС), можно констатировать, что проблема расчета показателей балансовой надежности (ПБН) по-прежнему остается актуальной. До сих пор основным методом расчета ПБН остается предложенный в середине XX века метод статистических испытаний Монте-Карло. Более эффективные в вычислительном отношении аналитические методы, как правило, связаны с введением большого числа допущений и ограничений и применимы лишь для частных случаев представления структуры ЭЭС, например, для объединенных ЭЭС высоких и сверхвысоких напряжений. Разработанные аналитические методы становятся не приемлемыми для современных распределительных электрических сетей средних напряжений (6, 10, 20, 35 кВ) с возобновляемыми источниками энергии (ВИЭ). Такие сети (микрогрид) могут работать в изолированном от основной электрической сети режиме, что требует учета дополнительных факторов, в частности более точного учета энергообеспеченности. Основным аппаратом здесь вновь становится метод Монте-Карло, который требует модификаций в направлении учета неопределенности располагаемой генерации.

Основная задача анализа балансовой надежности (БН) электроэнергетической системы (ЭЭС) – оценить вероятностные показатели (вероятность, частота, математическое ожидание (МО) и др.) дефицита мощности (ДМ) в ЭЭС, наличие которого рассматривается как нарушение (отказ) нормального функционирования ЭЭС [1–3]. Аналогом упомянутых показателей балансовой надежности за рубежом являются: LOLP (Loss of load probability), LOLF (Loss of load frequency), EPNS (Expected power not supplied) [4]. Их сравнительная оценка, соответствие и формулы преобразования описаны в [5].

Случайное состояние системы, в основном, характеризуется вероятностным характером нагрузки  $L = \{L_i, i = 1, \dots, n\}$ , располагаемой генерации  $G = \{G_i, i = 1, \dots, n\}$  и топологии электрической сети. При этом дефициты мощности могут иметь как локальный (в отдельных подсистемах), так и глобальный (по ЭЭС в целом) характер. Локальные ДМ определяются, в основном, состоянием (включён–отключён) и пропускной способностью элементов электрической сети.

В зависимости от степени детализации и целевой направленности решаемой задачи ЭЭС могут рассматриваться как: концентрированные; с ограниченной пропускной способностью (ПС) межсистемных связей (МСС); и в полной конфигурации, с учетом систем управления [6]. Упомянутые структурные уровни характеризуются специфическими математическими моделями, определяемыми степенью детализации систем, совокупностью ограничений и допущений.

Структура 1 ориентирована, в основном, на определение оптимального резерва генерирующей мощности в задачах перспективного развития ЭЭС. Затраты на генерацию, как правило, существенно выше, нежели затраты на транспорт электроэнергии, поэтому часто задача развития ЭЭС решается поэтапно: развитие генерирующей подсистемы при условии достаточной пропускной способности электрической сети (концентрированная ЭЭС) и развитие электрической сети при условии заданной структуры генерирующей подсистемы.

На втором этапе ЭЭС рассматривается как система с ограниченной ПС МСС (структура 2). Здесь МСС с ограниченной ПС объединяют некоторое множество концентрированных ЭЭС, которые в России принято определять как зоны надежности [7] или зоны свободного перетока мощности [8]. Основной направленностью задач БН здесь является анализ возможности появления локальных дефицитов мощности, вызванных ограниченностью ПС МСС. Именно такая структура является объектом анализа в представленной работе.

Полная детализация ЭЭС с учетом систем управления режимами является предметом анализа режимной надежности; ориентирована на задачи развития систем автоматики и диспетчерского управления и в данной работе не рассматривается.

Следует отметить, что все технические системы, в том числе и ЭЭС, характеризуются малой (доли процента) вероятностью событий типа «отказ» (в БН ЭЭС – это дефицитное состояние ЭЭС). При этом, как правило, отказ проявляется при бесконечно большой комбинации внешних событий. Так в ЭЭС с двумя узлами нагрузки и фиксированной предельной мощностью электрических станций дефицит мощности может проявляться при недопустимо большом повышении нагрузки либо первого, либо второго, либо того и другого узлов. При этом величина превышения суммарной нагрузки над генерацией является непрерывной и отсюда бесконечно неопределенной в реализации величиной. Число узлов нагрузки и генерации реальных расчетных схем ЭЭС измеряется тысячами. Отсюда многократно возрастает неопределенность дефицитного состояния

ЭЭС, становится затруднительным процесс идентификации наиболее значимых комбинаций событий, приводящих к отказу системы.

Основным математическим аппаратом при анализе надежности ЭЭС в настоящее время являются методы статистических испытаний, и в частности метод Монте-Карло (ММК) [9–13 и др.]. Данные методы позволяют моделировать системы со сложными функциональными взаимосвязями, не поддающимися аналитическому описанию, в том числе учитывать стохастическую неопределенность, связанную с предложением, спросом и пропускной способностью межсистемных связей.

Известен основной недостаток ММК – для обеспечения требуемой точности результатов требуется достаточно большое число  $N$  испытаний, поскольку  $N$  обратно пропорционально вероятности моделируемых событий. В частности, при моделировании события с вероятностью  $10^{-3}$  и погрешностью моделирования 1% требуется не менее  $10^5$  статистических испытаний [14]. При анализе балансовой надежности реальных ЭЭС наиболее значимыми являются кратные отказы (одновременный отказ двух линий электропередачи (ЛЭП), одновременный отказ ЛЭП и энергоблока, отказ энергоблока в период пиковых нагрузок и др.), поскольку единичные отказы электрооборудования ЭЭС, как правило не приводят к ограничению электропотребления – ЭЭС проектируются и сооружаются с учетом критерия N-1, при котором единичный отказ любого элемента ЭЭС не должен приводить к отказу процесса электроснабжения потребителей. Вероятность кратных независимых отказов равна произведению вероятностей отказа отказавших элементов. В результате вероятность кратных отказов принимает значения  $10^{-6}$ – $10^{-8}$ . При этом для идентификации, моделирования и анализа послеаварийных состояний ЭЭС методом ММК требуется число испытаний не менее  $10^7$ – $10^9$ . При меньшем числе испытаний идентификация таких редких событий становится маловероятной, что приводит к значимой погрешности результирующих показателей БН. С учетом того, что при каждом испытании требуется выполнение оптимизационных расчетов (оптимальное потокораспределение) анализ БН ЭЭС потребует несколько часов машинного времени. Следует отметить, что расчет показателей надежности, как правило, является составной частью более общих задач, например, выбор оптимальной конфигурации электрической сети при ее развитии. Отсюда длительность расчета надежности варианта развития ЭЭС как отдельного расчетного блока лимитируется по времени. Современная энергосистема требует все более сложной детализации и расширения учитываемых факторов, что нелинейно увеличивает сложность задачи оценки надежности ЭЭС. В совокупности это приводит к нецелесообразности, а иногда и невозможности использования стандартного

ММК для оценки БН энергосистемы. Требуются модификации ММК, направленные на увеличение вычислительной эффективности статистических методов.

Одним из путей решения проблемы выполнения большого числа относительно однотипных расчетов, связанных с моделированием в многомерном вероятностном пространстве редких (с вероятностью отказов менее  $10^{-5}$ ) событий является идея параллельных вычислений. Технология одновременного использования нескольких компьютеров (или процессоров) активно развивается в течение последних 30 лет [15–17]. Параллельные вычисления, безусловно, снижают вычислительную нагрузку ММК. Однако зависимость между количеством параллельных вычислительных ресурсов и временем вычислений близка к линейной функции [17]. Отсюда положительный эффект распараллеливания вычислений становится не столь очевидным при моделировании редких событий.

Другим направлением является использование методов паттернов, метамоделей, искусственного иммунитета, искусственной нейронной сети, опорных векторов наименьших квадратов [18–21] и др. Эти методы также показали снижение вычислительной нагрузки метода ММК. Однако, как правило, для задач БН ЭЭС они не апробированы, ориентированы на определенный класс задач, зачастую малоэффективны и не обеспечивают требуемую точность и надежность идентификации событий с вероятностью менее  $10^{-4}$ , что характерно для реальных систем энергетики. Отсюда проблема идентификации редких событий остается по-прежнему актуальной.

Более универсальный характер имеют итерационные методы, связанные с преобразованием анализируемых пространств, функций вероятностных распределений случайных переменных и критериальных функций. Наиболее распространенными в данном классе методов являются методы подпространств и значимой выборки [22–25], а также кросс-энтропийные методы [26–28].

В данной работе предлагаются и анализируются новые процедуры определения вероятностных параметров редких событий, основанные на методах вложенных множеств: моно и полицентры формирования промежуточной выборки значимых событий, а также модификация кросс-энтропийного метода, основанная на мягком преобразовании функции распределения мощности нагрузки.

## 2.2 Дефицит мощности как редкое событие

Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  – случайный вектор, который объединяет все вероятностные входные переменные  $L_i, G_i$ , и др. В простейшем случае, когда учитываются только располагаемая генерация и нагрузка и не учитываются случайные состояния элементов системы, температуры окружающей среды и др.,  $\mathbf{x} = \{L_i, G_i, i = 1, \dots, n\}$ , где  $i$  – номер узла электрической сети. С целью концентрации внимания на механизмах идентификации редких событий, связанных с отказами функционирования ЭЭС множество случайных, вероятностно определенных величин в данной работе ограничено только нагрузкой и располагаемой генерацией.

Дефицитность системы определяется разностью  $D_\Sigma = L_\Sigma - G_\Sigma = \sum L_i - \sum G_i$ ,  $L_\Sigma > G_\Sigma$ . Ее можно оценить, например, с помощью функции избыточности системы,  $S = G_\Sigma - L_\Sigma$  или (при учете пропускной способности электрической сети)  $S = \min(G_i - L_i, \forall i)$ . При независимости  $\{L_i, G_i\}$  часто имеет смысл рассматривать обобщенную случайную величину – располагаемая генерирующая мощность узла,  $r_i = G_i - L_i$ . Ее МО и дисперсия:  $\mu_{r_i} = \mu_{G_i} - \mu_{L_i}$ ;  $\sigma_{r_i}^2 = \sigma_{G_i}^2 + \sigma_{L_i}^2$ . В результате число управляющих стохастических переменных сокращается до числа узлов электрической сети. При этом  $D_\Sigma = -r_\Sigma = -\sum r_i$ ,  $r_\Sigma < 0$ .

В общем случае при анализе локальных ДМ необходимо учитывать законы распределения мощности в электрической сети. Каждый узел характеризуется экспортом  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  или импортом ( $-u_i$ ) мощности, определяемыми диспетчерским управлением ЭЭС и зависящими от располагаемой мощности узлов  $u_i = u_i(\mathbf{r})$ . При этом локальный ДМ  $D_i = u_i - r_i = u_i - G_i + L_i$ ;  $D_i > 0$ . При локальных ДМ системный ДМ фиксируется, если хотя бы в одном из узлов имеет место локальный ДМ  $D_\Sigma = \sum D_i$ . Для более точного учета дефицитности ЭЭС необходимо учитывать потери активной мощности в сети, которые определяются распределением потоков мощности  $\mathbf{z} = \{z_j, j = 1, \dots, m\}$  в элементах электрической сети и имеют нелинейный (квадратичный) характер. Учет потерь мощности связан с появлением дополнительного условия  $\pi_\Sigma = \sum u_i$ . При этом  $D_\Sigma = L_\Sigma - G_\Sigma + \pi_\Sigma$ ,  $D_\Sigma \geq 0$ .

Вектор  $\mathbf{z}$  определяется решением задачи оптимального распределения мощности нагрузки между источниками питания. В простейшем случае, приемлемом в задачах оценки надежности, можно считать  $\mathbf{z} = C\mathbf{u}$ , где  $C$  – матрица потокораспределения [7]. В результате ДМ в ЭЭС представляет сложную (часто определяемую алгоритмически)

функциональную зависимость от совокупности управляющих переменных, имеющих случайный характер.

Состояние дефицитности системы фиксируется, если некоторая заданная на множестве управляющих переменных критериальная функция  $\psi(\mathbf{x})$  становится меньше заданного предельного значения  $\psi_{lim}$ :  $\psi(\mathbf{x}) < \psi_{lim}$ . В практике для идентификации дефицитности чаще используется функция с нулевым порогом,  $S(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi_{lim}$ , которая при дефицитности системы принимает, например, отрицательное значение,  $S(\mathbf{x}) < 0$ . При этом область

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : S(\mathbf{x}) < 0\} \quad (2.1)$$

определяет совокупность дефицитных состояний системы.

При учете локальных ДМ в ЭЭС критериальная функция имеет вид:

$$S(\mathbf{r}) = \min \left( \sum r_i - \pi_{\Sigma}; r_i - u_i(\mathbf{r}), \forall i \right).$$

Критериальной функции соответствует индикаторная функция

$$J(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & S(\mathbf{x}) < 0; \\ 0, & S(\mathbf{x}) \geq 0, \end{cases}$$

которая позволяет выразить многие логические конструкции в аналитическом виде. В частности, вероятность  $\mathbb{P}_H$  состояния отказа (наличие ДМ в ЭЭС), может быть определена как МО индикаторной функции  $J(\mathbf{x})$ , принимающей в состоянии ЭЭС  $\mathbf{x}$  значение 1 при наличии отказа в ЭЭС и 0 при его отсутствии:

$$\mathbb{P}_H = \int J(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

где

$f(\mathbf{x})$  – плотность распределения (ПР) определяющей рассматриваемое событие многомерной случайной величины  $\mathbf{x}$ .

При заданной ПР  $f(\mathbf{x})$  вероятность появления редкого события определяется областью  $H$ , удовлетворяющую критерию  $S(\mathbf{x}) < 0$ .

$$\mathbb{P}_H = \int_{S(x) < 0} f(x) dx.$$

Функцию  $F(x)$  (или плотность  $f(x)$ ) распределения случайного вектора  $x$  состояний системы практически невозможно представить в виде аналитического выражения, поскольку она является результатом свертки разнотипных, с различающимися параметрами большого числа параметров системы (нагрузки, генерации, бинарные переменные, определяющие состояние элементов системы, солнечная радиация, скорость ветра и др.). Именно поэтому основным методом анализа надежности ЭЭС в настоящее время является метод статистических испытаний, позволяющий путем многократных испытаний и их статистической обработки получить достаточно точную оценку искомых величин. При этом в качестве исходных данных, как правило, задаются параметры маргинальных распределений исходных случайных величин (например, нагрузка узла  $i$  ЭЭС описывается нормальным (Гауссовским) распределением с математическим ожиданием  $\mu_i$  и среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_i$ ,  $L_i \sim N(x, \mu_i, \sigma_i)$ ).

### 2.3 Метод подпространств состояний

Эффективность метода Монте-Карло может быть повышена за счет применения методов уменьшения дисперсии, таких как выборка по значимости. Основная идея данной группы методов – формирование последовательности подмножеств  $H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m = H$  пространства состояний системы, где каждое последующее подпространство увеличивает вероятность идентификации редких событий и определяется на базе предыдущего, образуя последовательность цепи Маркова. При этом вероятность появления редкого события

$$\mathbb{P}_H = \Pr\left(H = \bigcap_{j=1}^m H_j\right) = \prod_{j=1}^m \Pr(H_j | H_{j-1}).$$

Каждое последующее подмножество выбирается так, чтобы вероятность условного события  $\Pr(H_j | H_{j-1})$  была бы достаточно велика. В результате малая вероятность представляется произведением относительно больших вероятностей [23–25].

Одним из путей формирования  $(H_j | H_{j-1})$  является отбор заданной доли  $p_0$  наиболее значимых событий  $X_b^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_k^j)$ , где  $k = p_0 N$ ;  $N$  – объем выборки. Индекс  $b$  характеризует максимальный для множества  $X_b^{j-1}$  уровень критериальной функции  $\psi(x)$ . (Его более детальное определение дано ниже). Значимость событий определяется по величине  $\psi(x)$  – чем меньше  $\psi(x)$ , тем больше значимость  $x$  (при  $\psi(x_i, i = 1, \dots, k) < 0$  вся область  $X_b^j$  состоит из значимых событий типа «отказ» (дефицитные состояния ЭЭС)). Дифференциация по значимости определяет механизм формирования множества  $X_b^j$ . Полная, полученная на основе данных этапа  $j - 1$  выборка  $H_{j-1}$  упорядочивается по возрастанию  $\psi(x): \psi(x_1) \leq \dots \leq \psi(x_N)$ . Первые  $p_0 N$  событий ( $p_0 \cdot 100$  перцентиль функции  $\psi(x)$ ) определяют множество  $X_b^j$  и соответствующую ему максимальную величину критериальной функции,  $b_j = \max(\psi(x), x \in X_b^j)$ , которая, в свою очередь, является основой для формирования нового множества  $H_j = \{x: \psi(x) < b_j\}$ . При этом величину  $p_0$  можно рассматривать как вероятность условного события  $\Pr(H_j | H_{j-1}) = p_0$ .

Представленный поэтапный процесс формирования множества редких событий характеризуется положительной величиной  $b_j > 0$  на всех промежуточных этапах. Это означает, что множество  $X_b^j$  содержит как события-отказы,  $\psi(x) < 0$ , так и не являющиеся отказами  $\psi(x) > 0$ , то есть принцип отбора событий сводится к исключению менее значимых событий и расширению области более значимых событий,  $b_j < b_{j-1}$ . Изначально  $b_0 = \infty$ , что означает, принадлежность зоне анализа всех сгенерированных на базе маргинальных ПР состояний системы. Однако на последующих этапах при генерации анализируемого множества псевдослучайных состояний системы вводится ограничение:  $\psi(x) < b_{j-1}$ . Как правило, это реализуется заменой параметров ПР случайных переменных некоторыми новыми расчетными величинами.

На последнем этапе  $b_j < 0$ . Это означает, что все события в выделяемой по принципу усечения множества с долей  $p_0$  являются отказами. Но отказами могут быть и события, не попавшие в определяемую перцентилем область,  $b_j < \psi(x) < 0$ . Здесь условная вероятность определяется согласно соотношению:  $\Pr(H_m | H_{m-1}) = N(\psi(x) < 0) / N$ , где  $N(\psi(x) < 0)$  – число элементов выборки объема  $N$ , удовлетворяющих требованию  $\psi(x) < 0$ .

В зависимости от алгоритма полный объем выборки  $N^{(j)}$  на промежуточных этапах может отличаться от заданного  $N$ , однако при этом сохраняется принцип отбора – к

дальнейшему рассмотрению принимается только  $p_0$  — часть сформированного для анализа множества состояний системы.

### 2.3.1 Моноцентр формирования промежуточной выборки

Относительно небольшая совокупность  $X_b^{j-1}$  является лишь базой для формирования  $H_j$ . Ее элементы определяются согласно типу и параметрам функции распределения генерации псевдослучайных чисел на этапе  $j - 1$ . На этапе  $j$  это должны быть иные параметры, с большей степенью идентификации редкого события. Одним из возможных вариантов формирования новой выборки предлагается генерация псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному распределению с МО  $\mu^j = \mathbb{E}(x_1^{j-1}, x_2^{j-1}, \dots, x_k^{j-1})$  и дисперсией  $D^j = \mathbb{D}(x_1^{j-1}, x_2^{j-1}, \dots, x_k^{j-1})$ . На первом этапе в качестве  $\mu^{(1)}, D^{(1)}$  принимаются МО и дисперсии рассматриваемой совокупности исходных случайных величин. Поскольку вектор с параметрами  $(\mu^j, D^j)$  является наилучшим представителем области  $X^j$ , то именно этот вектор целесообразно рассматривать в качестве центра области  $H_j$ .

Новое, сгенерированное на этапе  $j$  множество псевдослучайных векторов с центром  $(\mu^j, D^j)$ , в общем случае содержит точки, не принадлежащее  $H_j$  по критерию  $H_j \subset H_{j-1}$ , то есть не удовлетворяющие условию  $\psi(x) < b_{j-1}$ . Решением данной проблемы является либо дополнение полученного множества до  $N$  элементов, удовлетворяющих условию  $\psi(x) < b_{j-1}$ , либо выполняется простое удаление неудовлетворительных состояний системы. В последнем случае выборка сокращается с  $N$  до  $N_j$  элементов, но все элементы оставшегося множества при этом принадлежат  $H_j$ . Следует заметить, что число удаляемых элементов, как правило, относительно не велико и сокращение анализируемого множества слабо влияет на статистические оценки искомых параметров (в частности, на вероятность и МО дефицита мощности).

Расчеты показывают, что выбор  $(\mu^j, D^j)$  в качестве центра формирования множества  $F_j$  приводит к некоторому завышению вероятности редкого события в области очень малых вероятностей (порядок:  $10^{-6}$  по отношению к  $10^{-7}$ ). Более точным является выбор центра в точке  $x^{*j}$ , соответствующей максимальному на этапе  $j - 1$  значению критериальной функции,  $\psi(x^{*j}) = b_{j-1}$ . Здесь априори допускается, что не менее половины новой генерации состояний системы не будут удовлетворять условию  $\psi(x) <$

$b_j$ , однако при этом увеличивается вероятность учета тех состояний, которые не попадают в статистическую выборку с центром  $(\mu^j, D^j)$ . Увеличение доли удаляемых событий неразрывно связано с требованием увеличением объема выборки  $N$ . Сдвиг центра  $(\mu^{*j} = x^{*j-1}, D^{*j})$  выборки относительно МО приводит к необходимости коррекции дисперсии  $D^{*j} = D^j + |x^{*j-1} - \mu^j|^2$ .

### 2.3.2 Метод опорных точек

Моноцентричный подход предполагает концентрацию выборки вокруг некоторого центра, например, согласно нормальному (Гауссовскому) распределению с МО в центре выборки. Однако принцип выделения периферийной области по вероятности  $p_0$  и несимметрия области редкого события (чем больше нагрузка, тем больше дефицит мощности) заставляет усомниться в правомочности Гауссовского распределения на промежуточных этапах. Логически более оправданным здесь является вероятностное распределение, неизвестное по типу, но представленное определенной на предшествующем этапе совокупностью (опорных) точек  $C_{j-1} = (x_1^{j-1}, x_2^{j-1}, \dots, x_k^{j-1})$ . Статистическое моделирование данного распределения возможно путем представления множества  $H_j$  в виде объединения подмножеств с центрами в опорных точках  $H_j = \cup H_{j_s}(x_s^{j-1})$ . В качестве СКО  $\sigma_j$  при формировании множества  $H_{j_s}$  можно рассматривать максимальное расстояние между точками множества  $C_{j-1}$ :  $\sigma_j = \max |x_k^{j-1} - x_l^{j-1}|, (x_k^{j-1}, x_l^{j-1}) \in C_{j-1}$ . Это позволяет обеспечить пересечение множеств точек, формируемых в многомерных сферах с центрами в точках  $x_k^{j-1} \in C_{j-1}$ , а следовательно более полно и равномерно учесть область  $C_{j-1}$ .

Основная проблема методов вложенных подпространств состояний является зависимость результирующих данных от механизма формирования промежуточных множеств. При этом возможны ситуации, когда последующее подпространство практически не меняет критериальный порог  $b_k \approx b_{k-1}$ , что приводит к отсутствию сходимости вычислительного процесса за заданное число итераций. При этом результирующая вероятность редкого события становится сколь угодно малой. Отсюда основные направления исследований в этой области направлены на повышение робастности методов. Существует достаточно большое число предложений по формированию промежуточных множеств [22–25]. Наряду с описанными выше

моноцентричными методами нами предложен и апробирован метод адаптивной выборки, сущность которого заключается в многократной адаптивной коррекции параметров (сдвиг и дисперсия) распределения промежуточной выборки.

**Алгоритм адаптивной выборки:**

- 1) Инициализация:  $k = 1$ ;  $N_c = p_0 N$ ;  $N_s = 1/p_0$ ;  $\lambda = 0.6$ .
- 2) Генерация по стандартному нормальному (Гауссовскому) распределению  $N$  псевдослучайных чисел:  $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$ .
- 3) Преобразование множества  $U$  в матрицу  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  именованных случайных переменных (нагрузка, генерация, состояние элементов системы), согласно их маргинальным законам распределения  $\mathbf{x}_i = \varphi_i(\mathbf{u}_i)$ .
- 4) Определение вектора критериальных функций  $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_i(\mathbf{x}_i)\}$  и его сортировка по возрастанию функции:  $\psi_i(\mathbf{x}_i) \geq \psi_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1})$ .
- 5) Определение на множестве  $\boldsymbol{\psi}$  перцентиля ( $p_0 \cdot 100$ ), соответствующему ему параметра  $b_k \geq 0$  и множества именованных значимых состояний системы  $H_{xk} = \{\mathbf{x}_i: \psi_i(\mathbf{x}_i) < b_k\}$ .
- 6) Генерация новой выборки  $N$  случайных состояний системы на базе полученных в п. 5) опорных состояний системы согласно алгоритму адаптивной выборки, где после определенного числа генераций меняются МО и СКО нормального распределения, согласно которому осуществляется генерация случайных чисел.
- 7) Пункты 4–6 повторяются до тех пор, пока  $b_k \geq 0$ . При этом условная вероятность  $Pr(H_k | H_{k-1}) = p_0$ . На последнем шаге  $m$ , при  $b_m < 0$  определяется число  $N_m$  элементов, удовлетворяющих условию  $\psi_{N_m}(\mathbf{x}_{N_m}) \leq 0$ ,  $\psi_{N_m+1}(\mathbf{x}_{N_m+1}) > 0$ . Результирующая вероятность редкого события  $Pr(H) = p_0^{m-1} N_m / N$ .
- 8) Определение остальных анализируемых вероятностных показателей (МО дефицита мощности и др.).

**2.4 Кросс-энтропийный метод**

Кросс-энтропийный метод (КЭМ) [26–28] основан на замене реальной функции  $f(\mathbf{x})$  плотности распределения анализируемой многомерной случайной величины, по которой делается выборка ММК, некоторой вспомогательной функцией плотности распределения (ВПР)  $q(\mathbf{x})$ , смещающей сферу анализа в область представляющего интерес редкого события. Данный подход широко известен при вычислении интегралов

сложных функций статистическими методами, где подынтегральная функция умножается и делится на некоторую функцию ПР, полностью определенную на рассматриваемом интервале интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{q(x)} q(x)dx = \mathbb{E}_q(W(x)) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W(x_i),$$

где

$$W(x) = f(x)/q(x),$$

$\mathbb{E}[\dots]$  – оператор математического ожидания.

При этом возникает проблема выбора вспомогательной функции – необходимо, чтобы основанная на ней расчетная процедура была бы не только адекватной по направленности (смещения анализируемой области в сторону редкого события), но и эффективной по быстрдействию и сходимости. При наличии ВПР вероятность дефицита мощности (2.2), может быть представлена в виде математического ожидания (МО) взвешенной индикаторной функции  $J(\mathbf{x})W(\mathbf{x})$ , определенной в многомерном пространстве случайных величин с плотностью распределения  $q(\mathbf{x})$ :

$$\mathbb{P}_H = \int J(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int J(\mathbf{x})W(\mathbf{x})q(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbb{E}_q[J(\mathbf{x})W(\mathbf{x})], \quad (2.3)$$

где

$W(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/q(\mathbf{x})$  – весовая функция, определяемая исходной ( $f(\mathbf{x})$ ) и вспомогательной ( $q(\mathbf{x})$ ) плотностями распределения.

Нетрудно видеть, что в выражении (2.3)  $q(\mathbf{x})$  может быть любой функцией, лишь бы она удовлетворяла требованиям, предъявляемым к ПР. При этом не обязательно, чтобы она принадлежала к тому же классу ПР, что и  $f(\mathbf{x})$ . Как правило, в качестве  $q(\mathbf{x})$  принимается ПР многомерного нормального распределения.

При моделировании случайных состояний системы  $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\}$  методом Монте-Карло на базе плотности распределения  $q(\mathbf{x})$  и набора дискретных состояний системы  $\{\mathbf{x}_i\}$  вероятность (2.3) редкого события трансформируется к виду:

$$\hat{\mathbb{P}}_H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\mathbf{x}_i)W(\mathbf{x}_i), \quad (2.4)$$

где

$\{W(\mathbf{x}_i)\}$  может рассматриваться как совокупность весовых коэффициентов.

Дисперсия  $V(\hat{\mathbb{P}}_F)$  оценки вероятности определяется как средняя дисперсий случайной величины, распределённой по закону Бернулли:

$$V(\hat{\mathbb{P}}_H) = \frac{1}{N} V(J_H) = \frac{1}{N} \mathbb{P}_H(1 - \mathbb{P}_H).$$

Коэффициент вариации  $CV$ , как мера ошибки оценки измеряемой случайной величины (вероятности  $\hat{\mathbb{P}}_H$ ), определяется отношением стандартного отклонения к МО. В частности, для квадрата  $CV^2(\hat{\mathbb{P}}_H)$ :

$$CV^2(\hat{\mathbb{P}}_H) = \frac{V[\hat{\mathbb{P}}_H]}{E[(\hat{\mathbb{P}}_H)]^2} = \frac{(1 - \mathbb{P}_H)}{N\mathbb{P}_H}$$

Отсюда видно, что коэффициент вариации (КВ) при моделировании по методу Монте-Карло обратно пропорционален  $\sqrt{N\mathbb{P}_F}$  и поэтому для получения достаточно точной оценки вероятности рассматриваемого события при малых  $\mathbb{P}_F$  для обеспечения приемлемого  $CV = 0,1 - 0,2$  необходимо чрезвычайно большое количество  $N$  испытаний ( $\sim 10^5$  при  $CV = 0,1$  и  $\mathbb{P}_F = 0,001$ ).

В качестве критерия оптимизации при выборе наиболее эффективной в классе  $\{q(\mathbf{x})\}$  функции  $q^*(\mathbf{x})$  может служить минимум дисперсии  $\mathbb{P}_F$ :

$$\min_q V_q [J(\mathbf{x})W(\mathbf{x}; q(\mathbf{x}))].$$

Теоретически наилучшей функцией, приводящей к нулевой дисперсии искомой оценки вероятности  $\mathbb{P}_H$  является функция [28]:

$$q^*(\mathbf{x}) = \frac{J(\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{\int J(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \frac{J(\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{\mathbb{P}_H}. \quad (2.5)$$

Поскольку оптимальная ВПР зависит от неизвестных величин  $\mathbb{P}_H$  и  $J(\mathbf{x})$ , непосредственное аналитическое определение  $q^*(\mathbf{x})$  невозможно. Достаточно хорошее

приближение позволяет получить КЭМ, основанный на последовательном уточнении параметров  $\mathbf{v}$  многомерной плотности распределения  $q(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  и процедура определения результирующей величины представляется в виде цепи Маркова с выбором параметров ВПР на каждом шаге. Для оценки параметров  $\mathbf{v}$  данный метод использует результаты промежуточных статистических испытаний. Вектор параметров  $\mathbf{v}$  определяется путем минимизации кросс-энтропии (KL-дивергенции) [28].

KL-дивергенция определяет меру близости двух произвольных ПР  $p_1(\mathbf{x}); p_2(\mathbf{x})$ :

$$\mathbb{D}_{KL}(p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x})) = \mathbb{E}_{p_1(\mathbf{x})} \left( \ln \left( \frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})} \right) \right) = \int_{R^n} (\ln(p_1(\mathbf{x})) - \ln(p_2(\mathbf{x}))) dF_1(\mathbf{x}).$$

В данной работе в качестве  $p_1(\mathbf{x}); p_2(\mathbf{x})$  принимаются соответственно оптимальная ПР  $q^*(\mathbf{x})$  и ее текущая оценка  $q(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ . KL-дивергенция  $\mathbb{D}_{KL}(q^*(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}; \mathbf{v}))$  определяет близость между этими функциями. В предлагаемой работе функция  $q(\mathbf{x}; \mathbf{v})$  представляется плотностью многомерного нормального распределения с математическим ожиданием  $\boldsymbol{\mu}_q$  и матрицей корреляционных моментов  $\Sigma_q$ . В такой постановке степень оптимальности, по существу, определяет вектор параметров  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\mu}_q; \Sigma_q]$ . При этом процедура оптимизации может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{D}_{KL}(q^*(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}; \mathbf{v})) = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}_{q^*} [\ln(q(\mathbf{x}; \mathbf{v}))] = \\ &= \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmax}} \int \ln(q(\mathbf{x}; \mathbf{v})) q^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя для определения  $\mathbf{v}^*$  наилучшую ПР (2.5) в полученное выражение и рассматривая  $\mathbb{P}_H$  как константу, получаем:

$$\mathbf{v}^* = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{\mathbb{P}_H} \int J(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \ln(q(\mathbf{x}; \mathbf{v})) d\mathbf{x} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmax}} \int J(\mathbf{x}) \ln(q(\mathbf{x}; \mathbf{v})) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

При использовании ВПР  $q(\mathbf{x})$

$$\mathbf{v}^* = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmax}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\mathbf{x}_i) W(\mathbf{x}_i) \ln(q(\mathbf{x}_i; \mathbf{v})) \right], \quad (2.7)$$

где

$$W(x) = f(x)/q(x).$$

КЭМ решает проблему оптимизации итеративно путем определения ряда промежуточных плотностей распределения  $\{q(x; v_k), k = 1, \dots, NT\}$ , которые, как показано на рисунке 2.1, постепенно приближаются к целевой плотности  $q^*(x)$ , представляющей область существования редкого события.

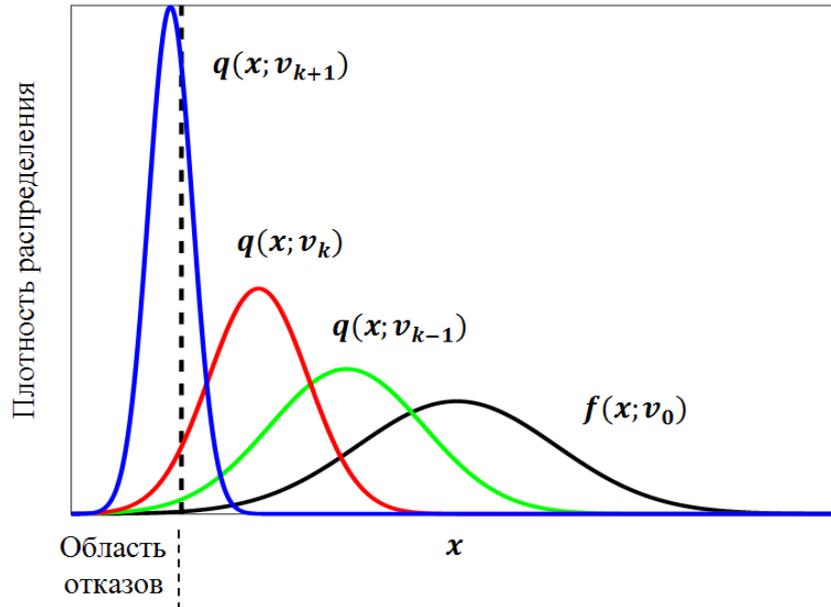


Рисунок 2.1 – Последовательность промежуточных распределений в процессе идентификации редкого события

На шаге  $k$  оптимальная ПР  $q^*(x)$  может быть представлена оценкой  $q(x; v_{k-1}^*)$  с полученными на предыдущем шаге оптимальными параметрами  $v_{k-1}^*$ . При этом  $W(x; v_{k-1}^*) = f(x)/q(x; v_{k-1}^*)$ . Область  $H_k$  промежуточного множества состояний системы определяется порогом  $b_k$ :

$$H_k = \{x: \psi_k(x) < b_k\},$$

$$J_k(x) = \begin{cases} 1, & \psi_k(x_k) < b_k; \\ 0, & \psi_k(x_k) \geq b_k. \end{cases} \quad (2.8)$$

Порог  $b_k$  вычисляется как  $\theta$ -квантиль (например, дециль полученных в процессе статистических испытаний и отсортированных от наименьшего к наибольшему значениям пороговой функции  $\psi_i(x_i)$ ). При этом моделирование выполняется согласно плотности распределения  $q(x; v_{k-1})$  с параметрами  $v_{k-1}$ .

Полученный в результате решения задачи оптимизации на шаге  $k - 1$  вектор  $\mathbf{v}^*$  рассматривается как новое значение вектора параметров оптимальной ПР  $q^*(\mathbf{x}), \mathbf{v}_k = \mathbf{v}^*$ . Начиная от исходного вектора параметров  $\mathbf{v}_0$ , каждый последующий вектор  $\mathbf{v}_k$  определяется решением оптимизационной задачи (2.7), приближаясь к оптимальной плотности распределения  $q^*(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (q(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k))$ , которая, в свою очередь, является наилучшей оценкой оптимальной в кросс-энтропийном методе вспомогательной ПР.

$$\mathbf{v}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{v}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J_k(\mathbf{x}_i) W(\mathbf{x}_i; \mathbf{v}_{k-1}) \ln(q(\mathbf{x}_i; \mathbf{v})) \right]. \quad (2.9)$$

При этом  $W(\mathbf{x}_i; \mathbf{v}_{k-1}) = f(\mathbf{x})/q(\mathbf{x}; \mathbf{v}_{k-1})$ .

Процедура повторяется до тех пор, пока  $b_k$  не станет отрицательной, или, по крайней мере,  $\theta \in [0.01, 0.1]$  испытаний не разместятся в искомой области редких событий [28]. Если число шагов до достижения критерия окончания итерационного процесса составляет  $m$ , то результирующая вероятность редкого события:

$$\hat{\mathbb{P}}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\mathbf{x}_i) W(\mathbf{x}_i; \mathbf{v}_{m-1}). \quad (2.10)$$

Как было упомянуто, вектор  $\mathbf{v}_0$ , принимается равным исходным параметрам вероятностных распределений анализируемых случайных величин, то есть при заданном  $N$  и нулевом пороговом значении определяемая соотношением (2.8) область  $H_0$ , может и не содержать ни единого редкого события, что приводит к вырожденности оптимизационной процедуры (2.9). Именно поэтому область  $H_k$  расширяется за счет ненулевого порогового значения  $b_k$ . В результате в число событий-отказов войдут «почти отказы». Отсюда отказы становятся менее редкими и идентифицируются в выборке.

#### Алгоритм СЕМ:

- 1) Ввод исходных данных ( $\mathbf{v}_0$  – параметры функций распределения случайных переменных). Инициализация переменных,  $k = 0$ ;  $N$  – объем выборки Монте-Карло;  $\theta$  – квантиль выборки.
- 2) На базе  $q(\mathbf{x}; \mathbf{v}_{k-1})$  генерация (метод Монте-Карло) матрицы  $X$  псевдослучайных состояний системы,  $\dim X = N \times n$ , где  $n$  – число случайных переменных системы  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N)$ ,  $\mathbf{x}_i = (x_{ij}, j = 1, \dots, n)$ .
- 3) Формирование векторов:

$$\psi(\mathbf{x}); J(\mathbf{x}, b_k); f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0); q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{k-1}); W(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{k-1}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0)/q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{k-1}).$$

- 4) Определение (либо через квантиль отсортированного массива  $\psi$ , либо статистически, через  $\mu_\psi; \sigma_\psi$ ) порогового предела  $b_k$  критериальной функции  $\psi(x)$ .
- 5) Формирование области редкого события  $H_k = \{x: \psi(x) < b_k\}$ .
- 6) Оптимизация:

$$v_k = \operatorname{argmax}_{v; x \in H_k} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_k(x_i) W(x_i; v_{k-1}) \ln(q(x_i; v)) \right].$$

- 7) Пункты 2–6 повторяются до тех пор, пока  $b_k > 0$ , при  $k = k + 1$ .
- 8) Формирование:  $J(x, 0), W(x, v_k), P_{\text{откл}}$ .
- 9) Определение результирующих величин: вероятности  
 $Pr = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(x_i) W(x_i; v_{m-1});$  МО дефицита мощности  
 $\mu_d = -\frac{1}{N} \sum \psi(x_i) J(x_i) W(x_i, v_{m-1})$  и др.

#### 2.4.1 Упрощенный кросс-энтропийный метод

Представленный выше классический КЭМ требует выполнения оптимизационной процедуры при определении параметров  $v_k$  текущей ПР  $q(x, v_k)$ . При этом  $v_k$  включает в себя МО  $\mu_k$  и матрицу корреляционных моментов  $\Sigma_k$  тех реализаций  $x$ , которые относятся к области  $H_k$ ,  $x \in H_k$ . Выражение (2.10) можно рассматривать как среднее значение величин  $J_F(x_i)$  с весами  $W(x_i)$ . Поскольку оно относится к вероятности, то каждая составляющая суммы может интерпретироваться как вероятность того, что реализация  $x_i$  принадлежит текущей области  $H_k$  редкого события. Поскольку область  $H_k$  определена индикаторной функцией  $J_k(x_i)$ , то МО располагаемой мощности узлов в области  $H_k$

$$\mu_r^{(k)} = \left( \sum_{x_i \in H_k} x_i W_i \right) / \left( \sum_{x_i \in H_k} W_i \right).$$

Матрица корреляционных моментов

$$\Sigma_r^{(k)} = \left( \sum_{x_i \in H_k} W(x_i) (x_i - \mu_r^{(k)}) (x_i - \mu_r^{(k)})^T \right) / \left( \sum_{x_i \in H_k} W(x_i) \right).$$

Данные параметры формируют вектор  $\mathbf{v}_k$ . При таком подходе не требуется оптимизационная процедура, что существенно сокращает длительность расчетов, без существенного снижения точности результатов.

#### 2.4.2 Модифицированный кросс-энтропийный метод

В традиционном КЭМ промежуточная область существования редкого события определяется дискретно через априори задаваемый квантиль, который формирует порог чувствительности  $b_k$ , что часто приводит к потере значимой информации (потере событий, связанных с дефицитом мощности). Это возможно из-за относительно небольшого (с целью ускорения расчетов) объема «тестовой» выборки на шаге  $k$ , или достаточно грубого ограничения области  $H_m$  на последнем шаге. Нами предлагается более «мягкая» процедура идентификации области редкого события. Если в традиционном КЭМ изменение индикаторной функции от 0 к 1 происходит дискретно в точке  $b = 0$ , что позволяет интерпретировать индикаторную функцию как функцию распределения вырожденной случайной величины, то в модифицированном кросс-энтропийном методе (МКЭМ) принимается, что индикаторная функция как функция вероятностного распределения с МО в точке 0 обладает некоторой дисперсией, итеративно приближающейся к нулю (рисунок 2.2). В результате в МКЭМ определяемая индикаторной функцией  $J_k(\mathbf{x})$  промежуточная область редкого события формируется функцией гладкого приближения. Это обеспечивает плавный переход от приблизительно оптимальной ПР  $q_k^*(\mathbf{x})$  к оптимальной ПР с учетом практически всех дефицитных состояний ЭЭС.

Предельная индикаторная функция в МКЭМ представляется в виде:

$$J_k(\mathbf{x}) = \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \Phi \left( -\frac{\psi(\mathbf{x})}{\delta_k} \right).$$

При этом на промежуточных этапах величина  $\delta_k > 0$ .

$$J_k(\mathbf{x}; \delta_k) = \begin{cases} 1, & \Phi(-\psi(\mathbf{x})) < \Phi\left(-\frac{\psi(\mathbf{x})}{\delta_k}\right), \\ 0, & \Phi(-\psi(\mathbf{x})) \geq \Phi\left(-\frac{\psi(\mathbf{x})}{\delta_k}\right). \end{cases}$$

где

$\delta_k$  – управляющий параметр, определяющий ширину зоны неопределенности области редкого события,

$\Phi(z)$  – интегральная функция стандартного нормального распределения.

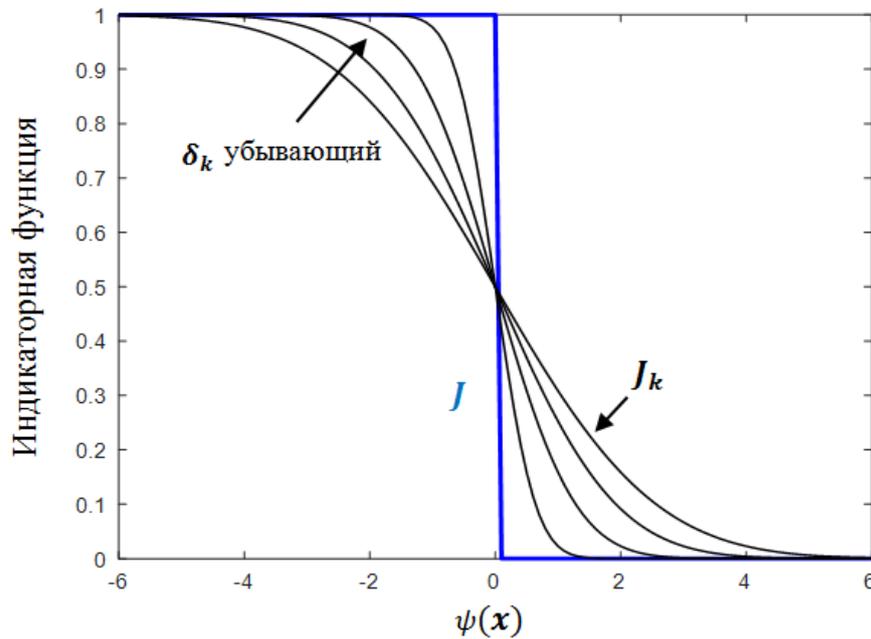


Рисунок 2.2 – Аппроксимация индикаторной функции

При  $\psi(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\delta_k \rightarrow 0$  индикаторная функция  $J_k(\mathbf{x}; \delta_k) \rightarrow 0$ , а при  $\psi(\mathbf{x}) < 0$ ,  $\delta_k \rightarrow 0$  индикаторная функция  $J_k(\mathbf{x}; \delta_k) \rightarrow 1$ , то есть вырождается в единичный скачек первого рода, что соответствует требованиям идеальной идентификации редкого события. Цепь  $\delta_0 > \delta_1 > \dots > \delta_m > 0$  определяет убывающую последовательность ширины зоны неопределенности решения (рисунок 2.2). При учете нового представления индикаторной функции условие (2.9) трансформируется к виду:

$$\mathbf{v}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{v}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi\left(-\frac{\psi(\mathbf{x}_i)}{\delta_k}\right) W(\mathbf{x}_i; \mathbf{v}_{k-1}) \ln(q(\mathbf{x}_i; \mathbf{v})) \right]. \quad (2.11)$$

Величина  $\delta_k$  определяется (корректируется) исходя из условия наилучшей аппроксимации ПР  $q_k^*(x)$  по выборке, полученной на базе  $q(x; \mathbf{v}_{k-1})$ . Данному условию соответствует минимум дисперсии функции  $\varphi_k(x_i; \mathbf{v}_{k-1}, \delta_k) = \Phi\left(-\frac{\psi(x_i)}{\delta_k}\right)W(x_i; \mathbf{v}_{k-1})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Это достигается минимизацией разности между коэффициентами вариации  $\mathbb{C}\mathbb{V}$  функции  $\varphi_k(x; \mathbf{v}_{k-1}, \delta_k)$  и априори заданного для обеспечения требуемой точности результатов коэффициента вариации  $\mathbb{C}\mathbb{V}_{t arg et}$  (в тестовых расчетах  $\mathbb{C}\mathbb{V}_{t arg et} = 1,5$ ):

$$\delta_k = \operatorname{argmin}_{\delta_k \in (0, \delta_{k-1})} |\mathbb{C}\mathbb{V}_{\varphi_k} - \mathbb{C}\mathbb{V}_{t arg et}| \quad (2.12)$$

Данный критерий является отражением следующих математических построений. В теории статистики рассматриваются взвешенные случайные величины (например, при определении МО взвешенной индикаторной функции (2.11)). При этом допускается (и в нашем случае это имеет место), что весовые коэффициенты могут изменяться в процессе итерационного процесса. Критерием, который позволяет максимально полно учесть вариацию весов, является эффективный размер выборки (ESS) (число проб с ненулевым весом), который приближенно оценивает необходимое количество статистических выборок. ESS часто используется в адаптивных последовательных реализациях Монте-Карло типа байесовских решений и может быть выражена через  $\mathbb{C}\mathbb{V}$  весов [28, 29] как:

$$ESS_k = \frac{N}{1 + \mathbb{C}\mathbb{V}_{W_k}^2}.$$

Подбор эффективного размера выборки эквивалентен подбору коэффициента вариации весов  $\mathbb{C}\mathbb{V}_{W_k}$ , как показано в этих уравнениях:

$$\delta_k = \operatorname{argmin}_{\delta_k \in (0, \delta_{k-1})} |ESS_k - ESS_{t arg et}| \cong \operatorname{argmin}_{\delta_k \in (0, \delta_{k-1})} |\mathbb{C}\mathbb{V}_{W_k} - \mathbb{C}\mathbb{V}_{t arg et}|.$$

Начиная с  $\delta_0 = \infty$  и  $\mathbf{v}_0$  процедура повторяется итерационно и прекращается, когда коэффициенты вариации,  $\mathbb{C}\mathbb{V}$  весов текущей мягкой аппроксимации ПР  $q^*(x)$  ниже, чем  $\mathbb{C}\mathbb{V}_{t arg et}$ . При этом

$$\left\{ W(x_i; \delta_k) = \frac{q^*(x_i)}{q_k^*(x_i)} = \frac{J_H(\psi(x_i))}{\Phi\left(\frac{\psi(x_i)}{\delta_k}\right)}, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.13)$$

Необходимое число итераций  $m$  здесь зависит от соотношения коэффициентов вариации и в качестве результирующей принимается ПР  $q_k^*(x)$ , полученная на последней итерации. Расчеты показывают, что использование CV весов в качестве критерия остановки вместо параметрической плотности  $q(x; v_{k-1})$  улучшает надежность (robustness) сходимости метода.

Возникает вопрос: почему  $CV_{target} = 1,5$ ? Действительно, в практических расчетах приемлемым считается КВ, не превышающий 0,2–0,3. Здесь следует принять во внимание, что квадрат КВ выборки равен среднему квадратов КВ реализаций поскольку МО среднего по выборке равно МО рассматриваемой случайной величины,  $E(\bar{x} = (\sum x_i)/N) = \mu_x$ , а дисперсия случайной величины  $\bar{x} D(\bar{x}) = D_x/N$ . Отсюда

$$CV^2(\bar{x}) = D(\bar{x})/E^2(\bar{x}) = \frac{1}{N} D_x / \mu_x^2 = \frac{1}{N} CV^2(x) = \frac{1}{N} \sum CV^2(x_i).$$

Применительно к функции  $\hat{\phi}_k$  и вероятности  $\hat{\mathbb{P}}_H$ :

$$CV^2(\hat{\mathbb{P}}_H) = \frac{1}{N} CV^2(\hat{\phi}_k) = \frac{1}{N} (CV_{\phi_k})^2.$$

Если  $CV_{\phi_k} = 1,5$ , то при  $N = 1000$  имеем  $CV(\hat{\mathbb{P}}_H) = 0,047$ , что вполне удовлетворяет требованиям практики.

#### Алгоритм ЕСЕМ:

- 1) Ввод исходных данных:  $\mathbf{v}_0, CV_{target}$ . Начальные присвоения  $k = 0, \delta_k = \infty$ .
- 2)  $k = k + 1$ . Генерация  $N$  реализаций состояний системы  $\mathbf{x}$  на базе Гауссовского распределения с плотностью  $q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{k-1})$ .
- 3) Формирование векторов:  $J(\mathbf{x}, \delta_{k-1}), q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{k-1}), \psi(\mathbf{x})$ , а также  $\left\{ W(x_i; \delta_{k-1}) = \frac{q^*(x_i)}{q_k^*(x_i)} = \frac{J_H(\psi(x_i))}{\Phi\left(\frac{\psi(x_i)}{\delta_{k-1}}\right)}, i = 1, \dots, N \right\}$ .
- 4) Определение  $\delta_k$  при оптимизации:  $\delta_k = \underset{\delta_k \in (0, \delta_{k-1})}{\operatorname{argmin}} |CV_{W_k} - CV_{target}|$ .

- 5) Определение  $v_k$  при оптимизации:

$$v_k = \operatorname{argmax}_{v_k} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_k(x_i; v_{k-1}) \ln(q(x_i; v_k)) \right].$$

- 6) Пункты 2–5 выполняются до тех пор, пока коэффициенты вариации CV весов больше заданных  $CV_{target}$ .
- 7) Расчет всех требуемых показателей надежности на базе полученных параметров области редких событий.

## 2.5 Проверочные расчеты

Для сравнения описанных процедур были выполнены расчёты показателей балансовой надежности пятиузловой электрической схемы. Результаты расчетов представлены в таблице 2.1, где обозначены методы: ММК – классический метод Монте-Карло (при  $10^7$  испытаниях), Моноцентр – метод подпространств с одной точкой формирования промежуточного подпространства, Полицентр – в качестве опорных точек формирования промежуточного подпространства  $H_k$  принимается множество  $H_{k-1}$ , SubSet – метод вложенных пространств с изменяющимися параметрами вероятностных распределений при формировании промежуточного подпространства, СЕ – классический кросс-энтропийный метод, ЕСЕ – модифицированный кросс-энтропийный метод.

Во втором столбце представлена вычисленная вероятность суммарного дефицита мощности ЭЭС. Следует отметить, что все представленные методы показывают приемлемую для практических расчетов точность редкого события – максимальное отклонение 3,3% (столбец Pr\_Eps,%, метод СЕ) при точном значении вероятности  $Pr=2,23 \cdot 10^{-5}$  можно считать незначительным для малых вероятностей. Для сравнения можно упомянуть, что при таких вероятностях широко распространенная замена биномиального распределения распределением Пуассона имеет гораздо большую погрешность [29].

Последующие 3 столбца относятся к МО дефицита мощности. Здесь разброс (коэффициент вариации, столбец mD, Cv) результирующих величин значительно больше. Следует отметить, что относительная ошибка расчета МО дефицита мощности (коэффициент вариации, столбец mD, Cv) превышает 25%. Увеличение точности возможно за счет увеличения объема промежуточной выборки. Однако это приводит к увеличению длительности расчетов (столбец  $t$ ), которая в представленных расчетных процедурах зависит в основном от емких по времени преобразований вероятностных распределений (равномерное – Гауссовское – индивидуальное (маргинальное)). Если

принять, что все случайные величины описываются одним и тем же нормальным распределением (с отличающимися параметрами), то это позволяет снизить длительность расчетов в несколько раз.

Полученные результаты позволяют рекомендовать для практического применения обеспечивающие наименьший разброс результирующих показателей кросс-энтропийные методы.

Таблица 2.1 – Проверочные расчеты

Метод	Pr, 10 <sup>-5</sup>	Pr,Cv	Pr_Eps,%	mD, 10 <sup>-4</sup>	mD, Cv	mD_Eps,%	t, сек
Точное значение	2,23	0	0	1,21	0	0	0
ММК	2,23	0,07	0,1%	1,21	0,10	0,1%	19,02
Моноцентр	2,24	0,6	0,5%	1,48	0,90	22,1%	0,44
Полицентр	2,29	0,65	2,9%	1,52	0,92	25,7%	0,19
SubSet (ад.выб.)	2,2	0,58	-1,4%	1,41	0,92	16,7%	3,21
CE	2,3	0,54	3,3%	1,24	0,03	2,5%	0,12
ECE	2,29	0,55	2,7%	1,14	0,03	-5,6%	0,95

## 2.6 Заключение к разделу 2

Описанные методы идентификации редких в электроэнергетике событий относятся к тем событиям, для которых можно определить критериальную функцию, меняющую свою величину в зависимости от удаленности от искомым событий. К таким функциям (и событиям) в электроэнергетике можно отнести дефицит мощности, положительный при наличии дефицита и отрицательный при наличии резерва генерирующей мощности.

Основной технологией идентификации редких событий является использование марковских цепей, где каждое последующее событие определяется на множестве событий, выделенных на предыдущем этапе по некоторому критерию.

Из существующих подходов идентификации редких событий можно выделить два, наиболее приемлемых для технических систем: основанных на использовании технологии вложенных подпространств и на преобразовании функций распределения случайных величин (в том числе, энтропийные методы).

Можно отметить, что все рассмотренные процедуры позволяют идентифицировать редкие события с точностью, приемлемой для практического применения. Некоторое

предпочтение по критерию робастности можно отдать модифицированному кросс-энтропийному методу из класса преобразований функций распределения.

Точность расчетов во многом зависит от параметров настройки методов, в том числе от объема тестовой выборки на промежуточных этапах формирования значимых событий. При этом длительность расчетов определяется не только объемом выборки, но и необходимостью вероятностных преобразований функций распределения.

### **3 Компьютерное моделирование поражающих воздействий авиакатастрофы на близрасположенные потенциально опасные объекты**

**Аннотация.** Разработан метод и приведен пример анализа и количественной оценки риска разрушения потенциально опасного объекта (ПОО) – резервуарного парка с керосином, снабжающего аэропорт, вследствие авиакатастрофы. На основе реальных статистических данных по авиакатастрофам построен шаблон распределения вероятности разрушения резервуара из-за попадания в него обломка самолета по результатам математического моделирования методами Монте-Карло и конечных элементов (с учетом всех возможных форм площади разлета, любых направлений падения самолета и величин площади разлета). Метод позволяет определить вероятность разрушения ПОО при воздействии поражающих факторов авиакатастрофы с учетом ее каскадного развития (разлета обломков воздушного судна, теплового излучения пожара разлитого авиатоплива, избыточного давления во фронте ударной волны взрыва топливно-воздушной смеси). Метод полезен для прогнозирования и оценки рисков при проектировании взаимозависимых критичных инфраструктур (ВКИ), которые могут подвергнуться природным и/или техногенным воздействиям (землетрясениям, наводнениям, грозам, авиакатастрофам, террористическим актам), поскольку позволяет учесть влияние ВКИ и свойства окружающей их территории. Методика и алгоритм построения шаблона распределения вероятности разрушения резервуара вследствие динамического удара обломка воздушного судна могут быть использованы для разработки/адаптации этого шаблона к оценке разлета обломков любого происхождения.

#### **3.1 Введение**

Особый интерес представляет изучение рисков катастроф авиационной инфраструктуры, которые могут привести к крупным авариям на потенциально опасных объектах (ПОО) [1]. Аварии на ПОО, в свою очередь, могут приобрести каскадный характер развития – так называемый эффект «домино».

Согласно собранным статистическим данным, количество крупных авиакатастроф в последнем десятилетии стало сокращаться; чаще всего разбиваются самолеты производства корпорации Boeing; наиболее частой причиной авиакатастроф являются ошибки экипажа и/или диспетчера; большинство из разбившихся самолетов имеют износ до 50%. Однако, эти данные носят лишь демонстрационный характер, отражающий

общую статистику и не могут ответить на вопрос оценки риска авиакатастроф и возможных последствий от них [2–10].

Исходя из проведенного обзора статей российских и иностранных авторов, можно сказать, что на сегодняшний день отсутствуют методики количественной оценки техногенного риска, обусловленного наличием в непосредственной близости от ПОО транспортной инфраструктуры: аэропорты, автомагистрали, железнодорожные пути сообщения и т.д.

Наиболее важным является вопрос исследования авиакатастроф, поскольку, как правило, данный вид аварий имеет самые значительные по своим масштабам последствия и, следовательно, имеет наиболее высокую вероятность возникновения каскадного развития аварии; также данный вид аварии может произойти абсолютно в любом месте, в отличие от железнодорожной катастрофы, чья зона воздействия ограничена наличием в непосредственной близости от ПОО железнодорожных путей сообщения.

В связи с вышесказанным, задачи исследования заключаются в следующем: сбор, обработка и анализ статистических данных об авиакатастрофах; разработка на основе полученных данных методики количественной оценки риска разрушения ПОО от поражающих факторов, обусловленных вероятными авиакатастрофами самолетов, расположенных на прилегающей к ПОО территории аэропортов (авиационной инфраструктуре).

Целью исследования является разработка метода и методики количественной оценки риска разрушения ПОО, обусловленного потенциальными авиакатастрофами.

Для построения методики, отражающей интенсивность поражающих факторов авиакатастрофы необходимо построить распределения вероятности аварии самолета в зависимости от расстояния до аэропорта; массы, высоты, массы топлива на борту; количества обломков; площади разлета обломков, формы площади разлета обломков; дополнительных факторов (падение самолета на землю/в воду; возникновение пожара; взрыв ТВС).

В работе принял участие магистрант Исенбаев Р. Л.

## 3.2 Обработка статистических данных

### 3.2.1 Построение гистограмм распределения вероятностей

Необходимые для построения методики данные представляют непрерывные величины, следовательно, для их анализа требуется выполнить аппроксимацию до дискретных значений и применить интервальную оценку данных [11-15]. Приведем расчеты полностью, несмотря на их простоту (для удобства восприятия методики). Исходные данные взяты из таблиц А.1–А.4. Оценим следующие параметры.

1. Вариационный ряд величины  $R$  – расстояние от аэропорта до места авиакатастрофы приведен в таблице 3.1, рисунке 3.1. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{59} = 7,68 \rightarrow M = 8 > 5, \quad (3.1)$$

где

$M$  – количество интервалов группирования (округляется в большую сторону, должно быть  $M \geq 5$ ),

$N$  – количество наблюдений.

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{3280 - 0}{8} = 410 \text{ км}, \quad (3.2)$$

где

$\Delta y$  – ширина интервала,

$y_{max}, y_{min}$  – максимальное и минимальное значение во всей выборке (округляются для получения целой величины  $\Delta y$  и дальнейшего удобства вычислений).

Так как 42 из 59 значений расстояний попадают в интервал до 35 км и данный интервал представляет наибольший интерес для дальнейших исследований и построения методики, то необходимо определить детальное распределение вероятности на этом интервале. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{42} = 6,48 \rightarrow M = 7 > 5. \quad (3.3)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{35 - 0}{7} = 5 \text{ км.} \quad (3.4)$$

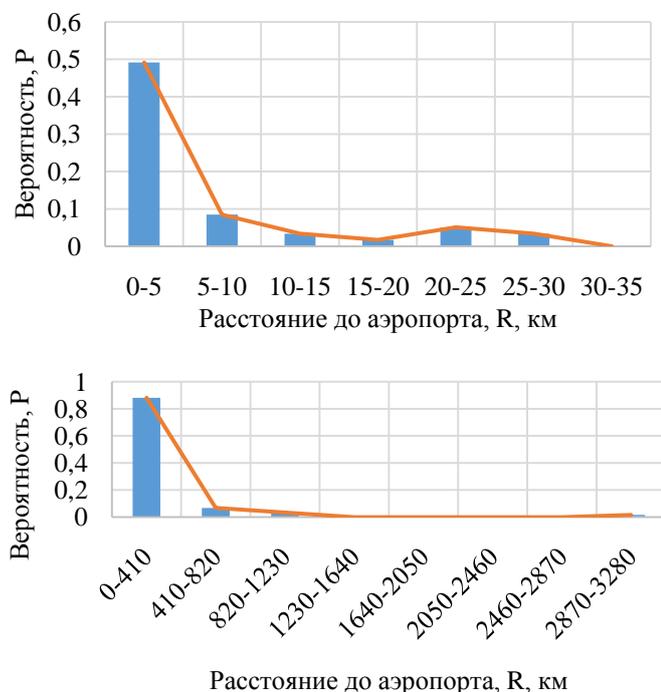


Рисунок 3.1 – Распределение вероятности аварии в зависимости от расстояния до аэропорта

Таблица 3.1 – Распределение вероятности аварии в зависимости от расстояния до аэропорта

Интервал расстояний, км	Среднее значение расстояния, км	Количество катастроф	Вероятность, %
1	2	3	4
Детальный масштаб в интервале 0–35 км (71,3%)			
0–5	2,5	29	49,2
5–10	7,5	5	8,5
10–15	12,5	2	3,4
15–20	17,5	1	1,7
20–25	22,5	3	5,1
25–30	27,5	2	3,4
30–35	32,5	0	0
Укрупненный масштаб в интервале 0–3280 км (100%)			
0–410	205	52	88,1

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3	4
410–820	615	4	6,8
820–1230	1025	2	3,4
1230–1640	1435	0	0
1640–2050	1845	0	0
2050–2460	2255	0	0
2460–2870	2665	0	0
2870–3280	3075	1	1,7

2. Вариационный ряд величины  $M_c$  – масса пустого самолета – таблица 3.2, рисунок 3.2. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{60} = 7,75 \rightarrow M = 8 > 5. \quad (3.5)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{177 - 17}{8} = 20 \text{ т.} \quad (3.6)$$

Таблица 3.2 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной массой

Интервал масс, т	Среднее значение массы самолета, т	Количество катастроф	Вероятность, %
17–37	27	9	15,0
37–57	47	20	33,3
57–77	67	9	15,0
77–97	87	8	13,3
97–117	107	3	5,0
117–137	127	3	5,0
137–157	147	1	1,7
157–177	167	7	11,7

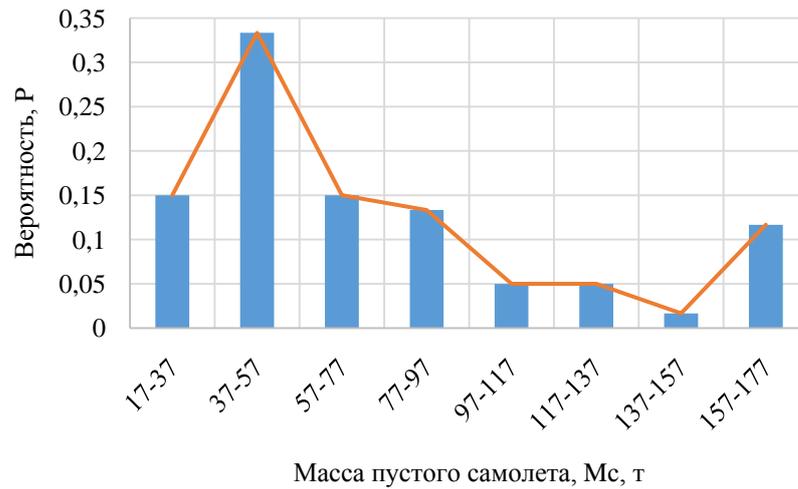


Рисунок 3.2 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной массой

3. Вариационный ряд величины  $m_T$  – масса топлива на борту самолетов моменту катастрофы – таблица 3.3, рисунок 3.3. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{59} = 7,68 \rightarrow M = 8 > 5. \quad (3.7)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{120 - 0}{8} = 15 \text{ т.} \quad (3.8)$$

Таблица 3.3 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной массой топлива на борту

Интервал масс, т	Среднее значение массы топлива, т	Количество катастроф	Вероятность, %
0–15	7,5	34	57,6
15–30	22,5	10	16,9
30–45	37,5	5	8,5
45–60	52,5	3	5,1
60–75	67,5	4	6,8
75–90	82,5	0	0,0
90–105	97,5	1	1,7
105–120	112,5	2	3,4

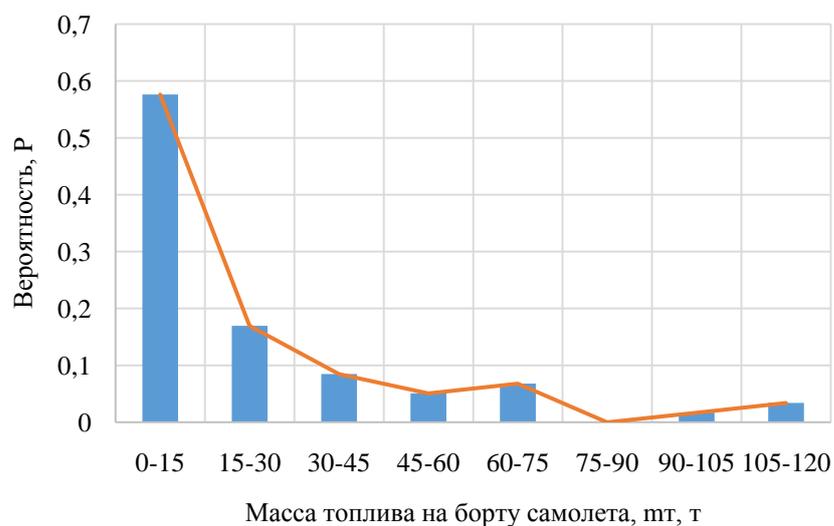


Рисунок 3.3 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной массой топлива на борту

4. Вариационный ряд величины  $k_{об}$  (количество обломков – таблица 3.5, рисунок 3.4).

Для подсчета количества обломков необходимо учесть в расчетах дополнительные данные о 7 катастрофах (таблица 3.4), так как таблица А.3 содержит такую информацию в недостаточном количестве – 3 авиакатастрофы.

Для подсчета количества обломков по снимкам была использована программа AdobePhotoshopCS6Extended – при необходимости выполнялось увеличение изображения (рисунок Б.8) и корректировка резкости.

Таблица 3.4 – Сведения об известных и дополнительных авиакатастрофах

№	№ п/п	Источник подсчета (приложение Б)	Количество обломков, шт.
1	5	рисунок Б.1	190
2	41	рисунок Б.2	189
3	-	рисунок Б.3	217
4	-	рисунок Б.4	290
5	-	рисунок Б.5	222
6	-	рисунок Б.6	384
7	-	рисунок Б.7	177
8	-	рисунок Б.8	309
9	-	рисунок Б.9	152

Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{10} = 3,16 \rightarrow M = 5 \geq 5. \quad (3.9)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{400 - 150}{5} = 50 \text{ шт.} \quad (3.10)$$

Таблица 3.5 – Распределение вероятности аварии с определенным количеством обломков

Интервал количества, шт.	Среднее значение количества, шт.	Количество катастроф	Вероятность, %
150–200	175	5	50,0
200–250	225	2	20,0
250–300	275	1	10,0
300–350	325	1	10,0
350–400	375	1	10,0

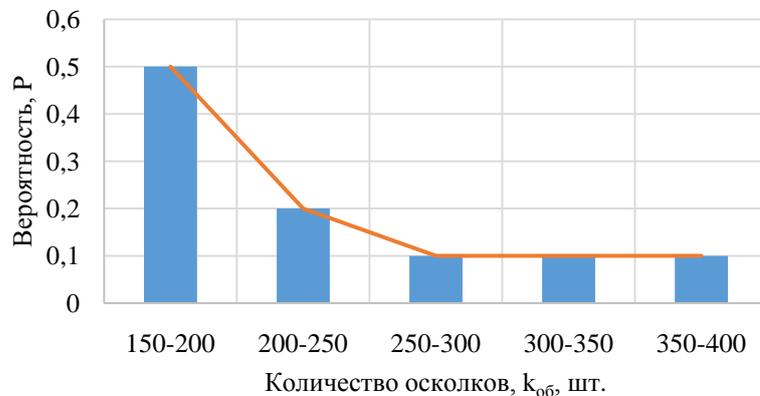


Рисунок 3.4 – Распределение вероятности аварии с определенным количеством обломков

5. Вариационный ряд величины  $S_{об}$  – площадь разлета обломков – таблица 3.6, рисунок 3.5. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{20} = 4,47 \rightarrow M = 5 \geq 5. \quad (3.11)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{30-0}{5} = 6 \text{ км}^2. \quad (3.12)$$

Так как 17 из 20 значений площади разлета обломков попадают в интервал до 112000 м<sup>2</sup> и этот интервал представляет наибольший интерес для дальнейших исследований и построения методики, то необходимо определить детальное распределение вероятности на этом интервале. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{17} = 4,12 \rightarrow M = 5 \geq 5. \quad (3.13)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{112000 - 2000}{5} = 22000 \text{ м}^2. \quad (3.14)$$

6. Вариационный ряд величины  $H_c$  – высота самолета – таблица 3.7, рисунок 3.6. Количество интервалов группирования:

$$M = \sqrt{N} = \sqrt{60} = 7,75 \rightarrow M = 8 \geq 5. \quad (3.15)$$

Ширина интервала:

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M} = \frac{19,5 - 7,5}{8} = 1,5 \text{ м}. \quad (3.16)$$

Таблица 3.6 – Распределение вероятности аварии с определенной площадью разлета обломков

Интервал площади	Среднее значение площади	Количество катастроф	Вероятность, %
1	2	3	4
Детальный масштаб в интервале 2000–112000 м <sup>2</sup>			
2000–24000	13000	10	50,0
24000–46000	35000	4	20,0
46000–68000	57000	1	5,0

Продолжение таблицы 3.6

1	2	3	4
68000–90000	79000	1	5,0
90000–112000	101000	1	5,0
Укрупненный масштаб в интервале 0–30 км <sup>2</sup>			
0–6	3	19	95,0
6–12	9	0	0,0
12–18	15	0	0,0
18–24	21	0	0,0
24–30	27	1	5,0

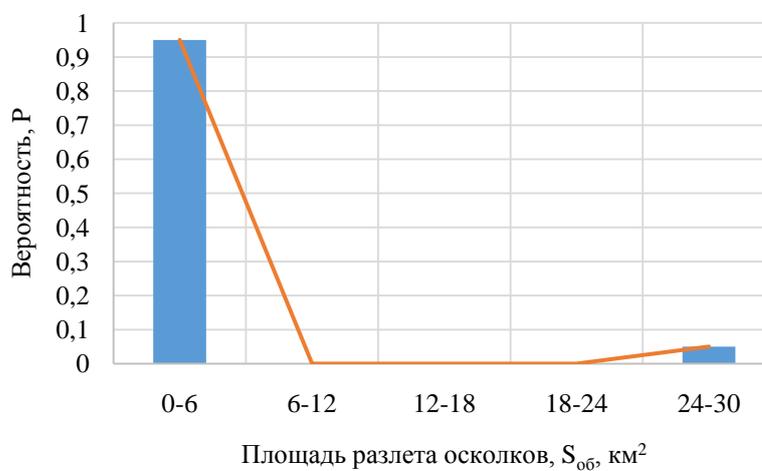


Рисунок 3.5 – Распределение вероятности аварии с определенной площадью разлета обломков

Таблица 3.7 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной высотой

Интервал высоты, м	Среднее значение высоты, м	Количество катастроф	Вероятность, %
7,5–9	8,25	3	5,0
9–10,5	9,75	8	13,33
10,5–12	11,25	17	28,33
12–13,5	12,75	9	15,0
13,5–15	14,25	1	1,67
15–16,5	15,75	4	6,67
16,5–18	17,25	10	16,67
18–19,85	18,93	8	13,33

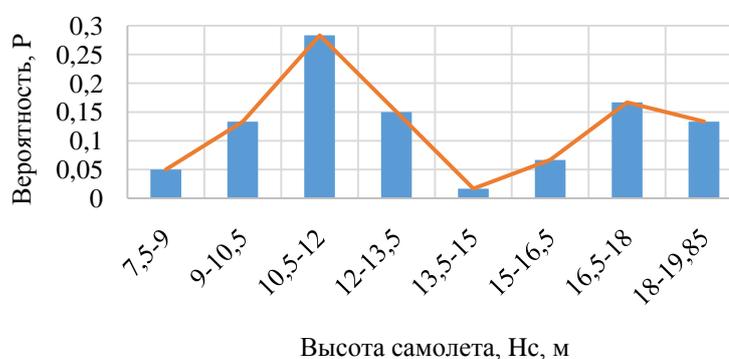


Рисунок 3.6 – Распределение вероятности аварии самолета с определенной высотой

Оценим вероятности прочих значимых факторов – падение самолета на землю/в воду, возникновение пожара, взрыв ТВС – таблица 3.8, рисунок 3.7.

Таблица 3.8 – Распределение вероятности аварии по различным факторам

Фактор	Вариант развития событий	Вероятность, %
Пожар	Да	73,9
	Нет	26,1
Взрыв	Да	37,0
	Нет	63,0
Крушение	В воду	23,3
	На землю	76,7

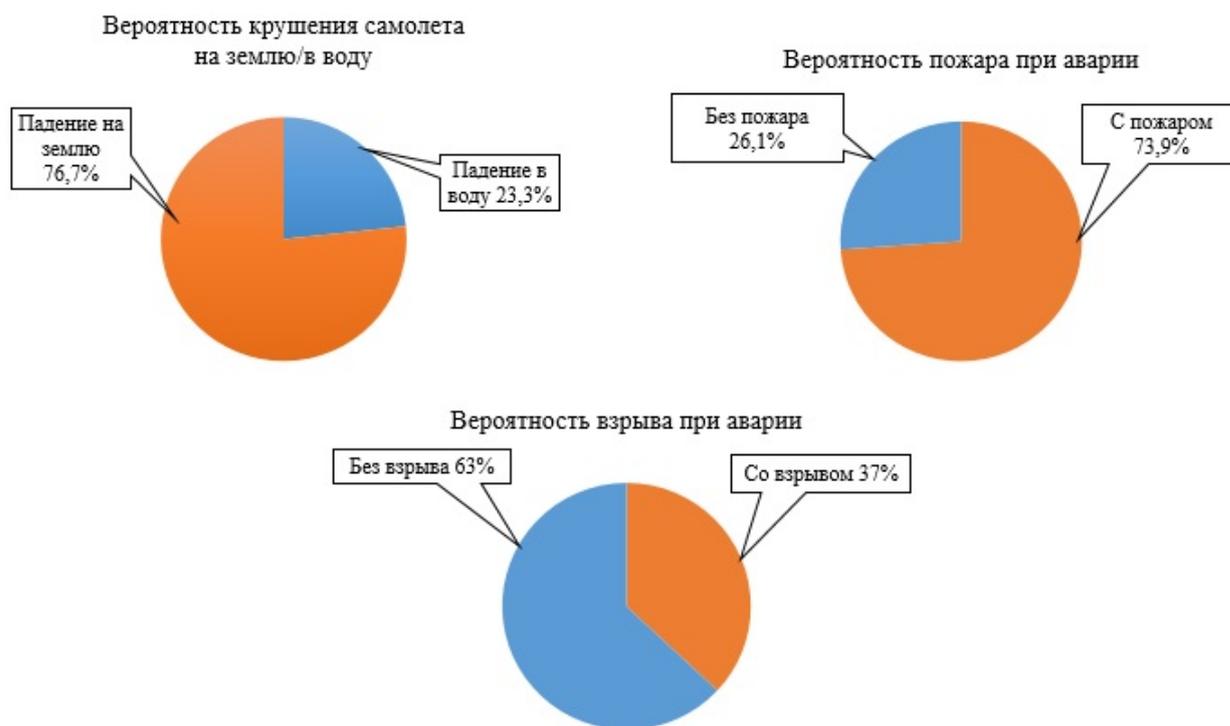


Рисунок 3.7 – Вероятности различных событий при авиакатастрофе

### 3.2.2 Анализ обработанных статистических данных

Собранные и обработанные данные смогут дать ответы на вопросы интенсивности поражающих факторов, возникающих при авиакатастрофе. Как видно из построенных графиков, распределение вероятностей некоторых случайных величин – расстояние от аэропорта до места авиакатастрофы, масса топлива на борту самолета к моменту катастрофы, количество обломков, площадь разлета обломков подчиняются экспоненциальному закону, в то время как масса пустого самолета и высота самолета не соответствуют никакой математической функции. Кроме указанных выше случайных величин из генеральной выборки были получены данные о нескольких дискретных величинах – вероятность крушения самолета на землю/в воду, возникновения пожара, взрыва ТВС. Разброс вероятности распределения некоторых случайных величин в результате расчета получился достаточно большим, в связи с этим был выполнен анализ участков распределения вероятности в значительно более мелком масштабе – то есть в масштабе, представляющем интерес с точки зрения настоящего исследования. К таким величинам относятся – расстояние от аэропорта до места авиакатастрофы и площадь разлета обломков. Таким образом, рассчитанные выше данные дают возможность

построить методику оценки риска на ПОО, обусловленного потенциальными катастрофами.

### **3.3 Разработка методики оценки риска**

#### **3.3.1 Принятые допущения для разработки методики**

1) При авиакатастрофе возникают следующие поражающие факторы: разлетающиеся по площади катастрофы со значительной скоростью обломки воздушного судна; тепловое излучение пожара разлитого топлива; избыточное давление во фронте ударной волны от взрыва разлитого топлива.

2) В рамках разрабатываемой методики выполнен анализ только наиболее опасного сценария развития авиакатастрофы. Данное ограничение обусловлено большим количеством неопределенностей, имеющих место при рассмотрении авиакатастрофы, среди которых – расчет вероятности падения самолета в конкретном месте с точностью до 1 м, а также угол падения самолета в горизонтальной плоскости. То есть, можно прийти к выводу, что невозможно установить наиболее вероятный сценарий развития аварии. Таким образом, при построении методики, с одной стороны, будут рассматриваться вероятности таких событий, которые ведут к наиболее значительным последствиям, а с другой стороны – среди возможного спектра событий с одинаковыми последствиями, будут рассматриваться те, которые имеют максимальную вероятность.

3) Масса самолета, масса топлива, высота самолета, количество обломков, площадь разлета обломков приняты независимыми величинами ввиду следующих факторов:

- масса топлива принята независимой от массы самолета, так как наиболее значимой для данного параметра является длина маршрута полета,
- количество обломков и площадь их разлета обуславливаются в основном рельефом местности, наличием высоких деревьев, крупных препятствий на территории, на которой потенциально возможна авиакатастрофа.

4) Как видно из рисунков Б.1–Б.9, площадь разлета обломков всегда представляет абсолютно случайную форму (во многом это обуславливается углом столкновения самолета с землей, рельефом местности, наличием препятствий и т.д.). Принято, что угол разлета обломков варьируется от острого угла в 20° до почти развернутого угла в 160°.

5) Самолет, сталкиваясь с землей, мгновенно полностью разрушается на мелкие обломки равной массы – формула (3.17) (в соответствии с допущением п. 5 приложения 7 в работе [16]):

$$m_{об} = \frac{M_c}{k_{об}}, \quad (3.17)$$

где

$m_{об}$  – масса обломка.

6) Высота, с которой все обломки начинают раздельное (самостоятельное) движение, принимается равной половине высоты самолета:

$$h_{об}^n = \frac{H_c}{2}, \quad (3.18)$$

где

$h_{об}^n$  – начальная высота полета обломков.

7) Площадь разлития топлива определяется, исходя из предположения, что толщина слоя разлития равна 3 см:

$$S_T = \frac{V_T}{t_T} = \frac{m_T}{\rho_T * t_T}, \quad (3.19)$$

где

$S_T$  – площадь разлития топлива,

$V_T$  – объем разлитого топлива,

$\rho_T = 0,805 \text{ т/м}^3$  – плотность авиационного топлива,

$t_T = 0,03 \text{ м}$  – толщина слоя разлития топлива.

Центр круга разлитого топлива принимается в месте падения самолета.

8) Масса облака ТВС принимается равной 10% от массы разлитого топлива самолета (в соответствии с допущением п. 2 приложения 5 в работе [16]):

$$m_{ТВС} = 0,1m_T, \quad (3.20)$$

где

$m_{ТВС}$  – масса облака ТВС.

### 3.3.2 Моделирование разлета обломков методом Монте-Карло

Как было сказано ранее, авиакатастрофа представляет цепочку событий, каждое из которых имеет очень широкий спектр вариантов развития. Одно из таких событий с наибольшей степенью неопределенности – падение самолета на землю в конкретном месте и разлет обломков по конкретной траектории. К тому же, на последствия катастрофы имеет большое влияние не только место падения, но и направление движения самолета после столкновения с землей (другими словами – горизонтальный угол падения). Однако, ввиду принятых допущений о рассмотрении сценариев с максимальными последствиями и стремлении поиска наиболее вероятного события с такими последствиями, задача установления вероятности данного сценария становится решаемой.

Таким образом, необходимо определить пространственный шаблон вероятностей разлета обломков, учитывающий все возможные горизонтальные углы падения самолета, все возможные формы сектора разлета обломков, а также данный шаблон должен быть модифицируем для различных величин площадей разлета обломков.

Следовательно, требуется решить следующие задачи.

1) Определить зависимости пространственного распределения вероятности разлета обломков на основе базового примера авиакатастрофы – этим примером будет служить авария №7 из таблицы 3.4. Выполнить аппроксимацию полученных зависимостей в соответствии с математическими функциями.

2) Выполнить компьютерное моделирование методом Монте-Карло для установления пространственного распределения вероятности разлета обломков с учетом всего спектра возможных секторов разлета (от угла в  $20^\circ$  до  $160^\circ$  – в соответствии с допущением №4 п. 3.3.1) [17,18].

3) Преобразовать полученный шаблон к виду, учитывающему все возможные горизонтальные углы падения самолета. Построение данного шаблона будем выполнять для наиболее вероятной площади разлета обломков равной  $S_{об} = 13000 \text{ м}^2$ , согласно рисунку 3.5.

#### 1. Определение функции пространственного распределения вероятности разлета обломков.

Для получения указанного распределения необходимо разбить всю площадь разлета на две координатных оси – горизонтальное распределение обломков по оси X и оси Y. Далее требуется разбить полученную плоскость на ячейки; шаг стороны ячейки примем равным 10 м. Далее необходимо выполнить ручной подсчет количества обломков

по обеим осям, приходящихся на каждую ячейку полученной сетки – рисунок 3.8. После суммирования обломков по двум осям получились следующие распределения – рисунок 3.9. Очевидно, что распределение вероятности разлета обломков по оси X представляет нормальное или Гауссово распределение, а распределение вероятности разлета обломков по оси Y – такое же нормальное, но только со смещенным центром. Смещенный центр можно объяснить тем, что большинство обломков имеют значительную скорость после разрушения самолета, совпадающую с направлением полета и, что логично, устремляются дальше от места падения. Подобного эффекта не возникает по перпендикулярной оси, так как в этом случае скорости обломков не имеют каких-либо отклонений по направлению движения. Аппроксимируем полученные распределения – рисунок 3.10. Те же распределения, только представленные в пространственной форме – рисунок 3.11.

2. Так как разброс обломков возможен в форме сектора с углом от  $20^\circ$  до  $160^\circ$ , то необходимо провести численный эксперимент методом Монте-Карло, результатом которого будет шаблон пространственного распределения вероятности, учитывающий все возможные варианты секторов.

Алгоритм выполнения эксперимента состоит в следующем.

а) Установить текущую величину угла сектора (в соответствии с текущей итерацией моделирования).

б) Вычислить радиус сектора с учетом установленного значения угла разлета обломков по формуле:

$$r = \sqrt{\frac{360S_{об}}{\pi\alpha}}, \quad (3.21)$$

где

$r$  – радиус сектора,

$S_{об} = 13000 \text{ м}^2$  – базовая площадь сектора,

$\alpha$  – угол сектора.

в) На основе функции распределения обломков по оси Y, изображенной на рисунке 3.10, выбрать случайным образом координату обломка Y.

г) Вычислить соответствующую данной координате Y максимальную величину разброса обломков по оси X (максимальная величина разлета обломков по оси X зависит от координаты Y, так как форма разлета представляет сектор, ширина которого меняется пропорционально удалению от его центра – места крушения самолета).

д) Согласно функции распределения обломков по оси  $X$ , изображенной на рисунке 3.10, и полученной в подпункте «г» ее максимальной величины выбрать случайным образом координату обломка  $X$ .

е) Выполнить 10000 раз действия пунктов в–д и сохранить координаты полученных точек.

ж) Выполнить 71 раз действия пунктов а–б, е (шаг изменения угла сектора равен  $2^\circ$ ).

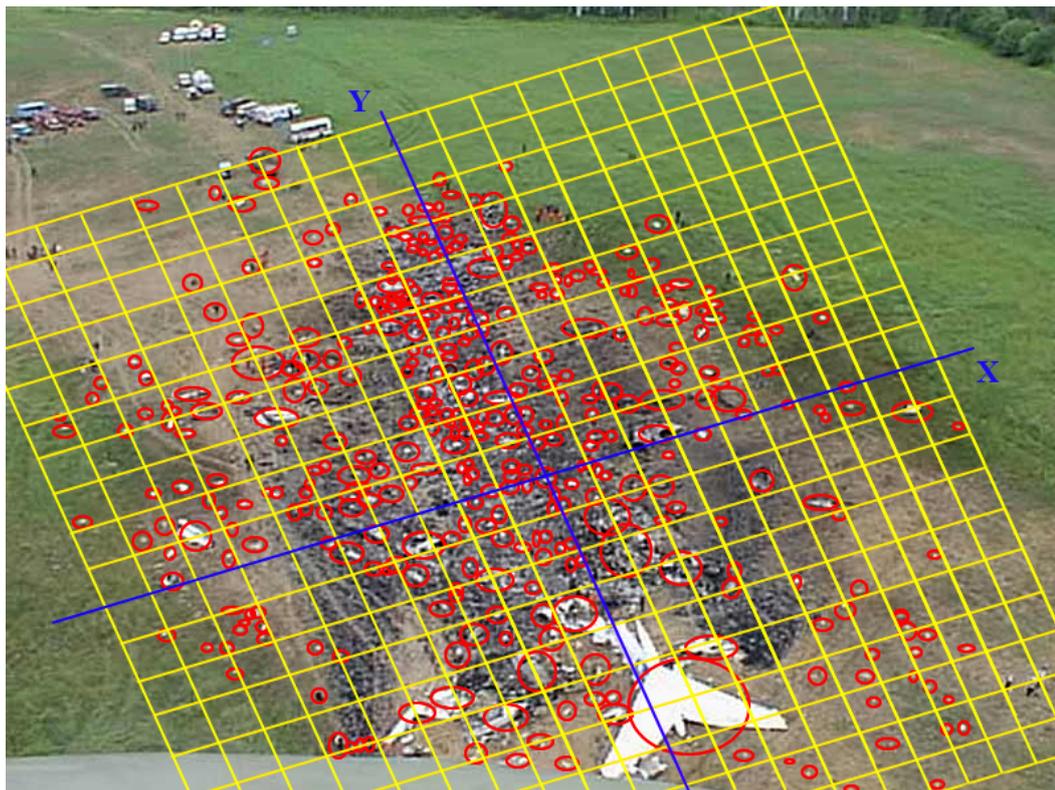


Рисунок 3.8 – Подсчет количества обломков на координатной сетке



Рисунок 3.9 – Распределения вероятности разлета обломков

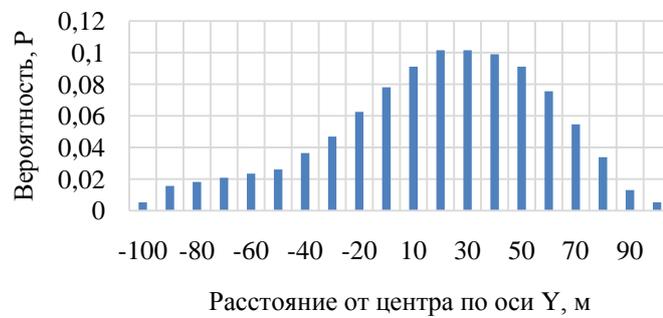


Рисунок 3.10 – Аппроксимированное распределение вероятности разлета обломков

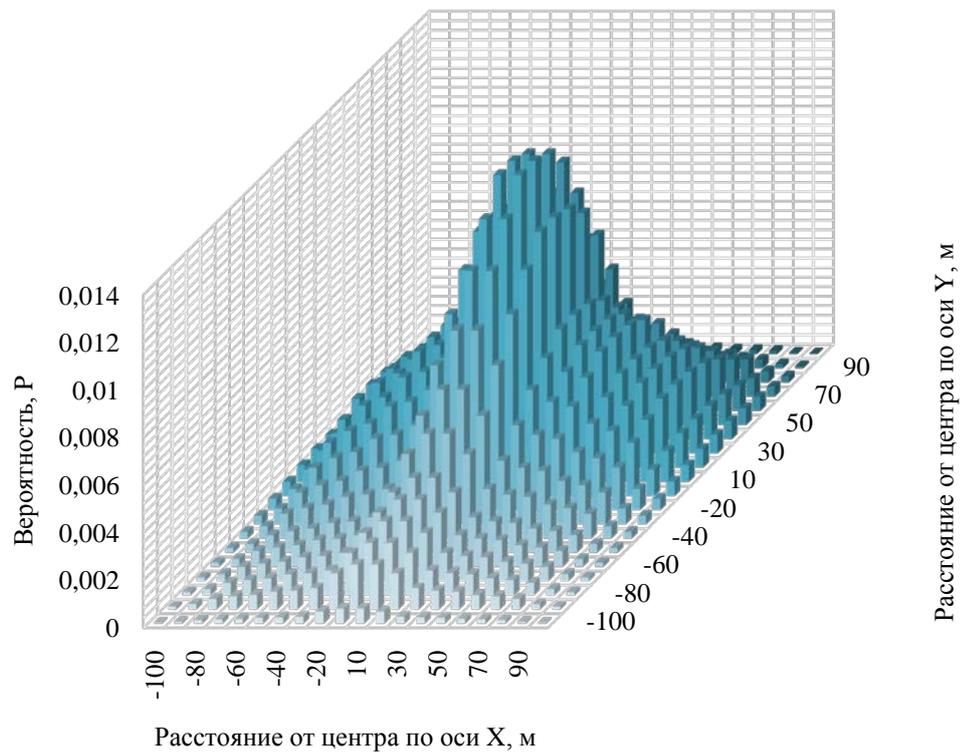


Рисунок 3.11 – Распределение вероятности разлета обломков

Для проведения рассмотренного эксперимента была разработана программа на языке CSharp в среде программирования Microsoft Visual Studio 2012 Express, функционирующая согласно описанному выше алгоритму. В результате моделирования и графической интерпретации было получено пространственное распределение вероятности, изображенное на рисунке 3.12.

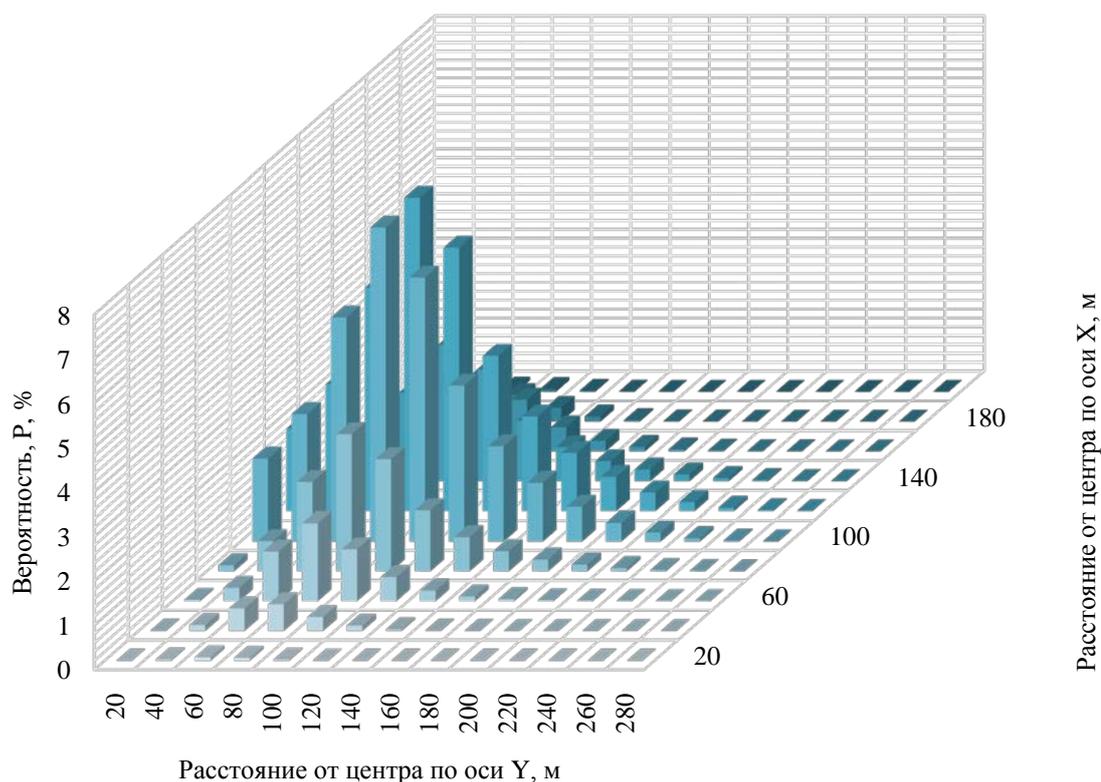


Рисунок 3.12 – Результат моделирования методом Монте-Карло – распределение вероятности разлета обломков с учетом всех возможных условий падения самолета

Как видно из рисунка 3.12, наибольшая вероятность попадания обломков сконцентрирована в координатах X – 90–120 м, Y – 50–110 м. На первый взгляд, данное распределение противоречит функции, изображенной на рисунке 3.10 (по оси Y обломки должны быть сконцентрированы в координатах 150–220 м).

Однако, полученные результаты верны, так как вероятность разброса обломков по оси Y также связана с радиусом сектора – то есть, при  $\angle\alpha = 160^\circ$  радиус равен:

$$r = \sqrt{\frac{360S_{об}}{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{360 \cdot 13000}{3,14 \cdot 160}} = 96,52 \text{ м.} \quad (3.22)$$

Следовательно, с учетом вышесказанного, обломки по оси Y наиболее плотно должны быть сконцентрированы на отрезке 50–80 м. Таким образом, при учете всех возможных секторов, получается распределение вероятности, изображенное на рисунке 3.12.

Для упрощения дальнейших расчетов, преобразуем полученное распределение к виду, изображенному на рисунке 3.13, с учетом возможной модификации для любой

величины  $S_{об}$  (координаты 0,50x; 0,00y – место падения самолета; плотность вероятности соответствует горизонтальной проекции объекта).

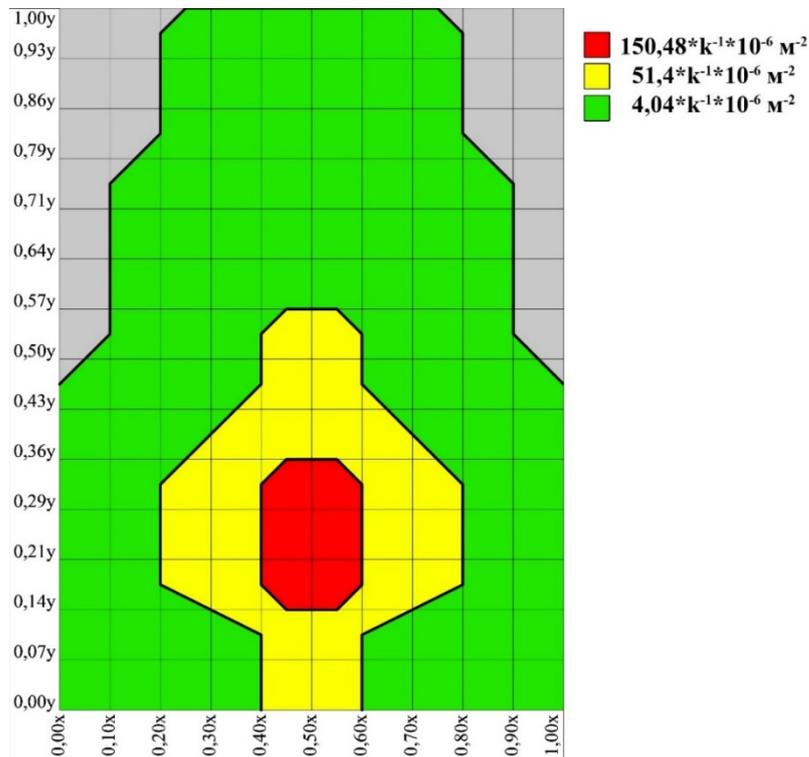


Рисунок 3.13 – Распределение вероятности разлета обломков самолета

Коэффициенты  $x$ ,  $y$  и  $k$  определяются по формулам (3.23), (3.24) и (3.25) соответственно:

$$x = \sqrt{9S_{об}/\pi}, \tag{3.23}$$

$$y = \sqrt{18S_{об}/\pi}, \tag{3.24}$$

$$k = S_{об}/13000. \tag{3.25}$$

Построенный шаблон отражает вероятность расположения обломков самолета после авиакатастрофы. Однако, такой шаблон не может решить задачу определения вероятности попадания обломка в какой-нибудь объект, находящийся на территории авиакатастрофы, так как не учитывает траекторию полета обломков: к примеру, обломки, находящиеся в квадрате с координатами 0,5x, 0,93y до попадания в эту точку пролетели

через все квадраты с координатой  $Y$  меньшей, чем  $0,93z$ . Следовательно, необходимо преобразовать полученный шаблон к новой форме с учетом вышесказанного. Для этого требуется разделить территорию авиакатастрофы на зоны, в пределах которых скорость и высота полета обломков принимается одинаковой.

Примем относительно разлета обломков: после столкновения с землей, как было сказано ранее в допущении №6 п. 3.3.1, самолет разрушается на обломки равной массы, каждый из которых начинает самостоятельное движение с высоты, определяемой по формуле (3.28).

Начальная вертикальная скорость обломков равна  $v_{06}^{B0} = 0$  м/с; вертикально обломок движется под действием силы тяжести с ускорением свободного падения  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>; горизонтальная скорость обломка  $v_{06}^r$  постоянна и определяется из выражения:

$$v_{06}^r = \frac{L_{06}^n}{t_{06}^n}, \quad (3.26)$$

где

$L_{06}^n$  – расстояние, которое пролетел обломок,

$t_{06}^n$  – время, за которое обломок долетел до точки падения.

Время, за которое обломок падает с начальной высоты на землю, определяется по формуле:

$$t_{06}^n = \sqrt{2h_{06}^n/g} = \sqrt{2 * 5,625/9,81} = 1,07 \text{ с}, \quad (3.27)$$

$$h_{06}^n = \frac{H_c}{2} = \frac{11,25}{2} = 5,625 \text{ м}. \quad (3.28)$$

Высота самолета определена на основе распределения вероятности, изображенной на рисунке 3.6. Принимаем, что после падения на землю обломок не представляет угрозы повреждения объектов ОПО.

Время, за которое обломок достигает зоны с расстоянием от места падения самолета «х», определяется по формуле:

$$t_{06}^x = L_{06}^x/v_{06}^r. \quad (3.29)$$

Высота, на которой обломок находится в зоне с расстоянием от места падения самолета «х», определяется по формуле:

$$h_{об}^x = 5,625 - \frac{g(t_{об}^x)^2}{2}. \quad (3.30)$$

Таким образом, для каждой зоны авиакатастрофы  $S_{об} = 13000 \text{ м}^2$  необходимо определить (на основе выражений (3.29) и (3.30)) плотность обломков на разных высотах и их горизонтальную скорость движения – см. таблицу В.1.

На рисунке 3.14 изображены результаты расчетов из таблицы В.1 для любой величины  $S_{об}$  (плотность вероятности соответствует вертикальной проекции объекта).

Далее необходимо лишь преобразовать данный шаблон к форме, учитывающей все возможные горизонтальные углы падения самолета.

Преобразование полученного шаблона к форме, учитывающей все возможные значения горизонтального угла падения самолета – рисунок 3.15 (плотность вероятности соответствует вертикальной проекции объекта). Вероятность попадания обломка в объект, находящийся в зоне авиакатастрофы, определяется по формуле:

$$P_{об} = \min(p_3 * S_{пр} * k_{об}; 1), \quad (3.31)$$

где

$P_{об}$  – вероятность попадания обломка в определенный объект,

$p_3$  – плотность движения обломков в зоне, в которой находится рассматриваемый объект,

$S_{пр}$  – открытая площадь вертикальной проекции объекта (та часть площади проекции рассматриваемого объекта, которая не закрыта другими объектами), определяемая по формуле:

$$S_{пр} = d_p * h_d, \quad (3.32)$$

$$h_{пр} = \min(h_p; h_3), \quad (3.33)$$

где

$d_p$  – ширина открытой части проекции, перпендикулярной к радиусу сектора разлета обломков,

$h_{пр}$  – минимальное значение из фактической высоты объекта  $h_p$  и средней высоты полета обломков в данной зоне  $h_3$ , принимаемой по таблице 3.9.

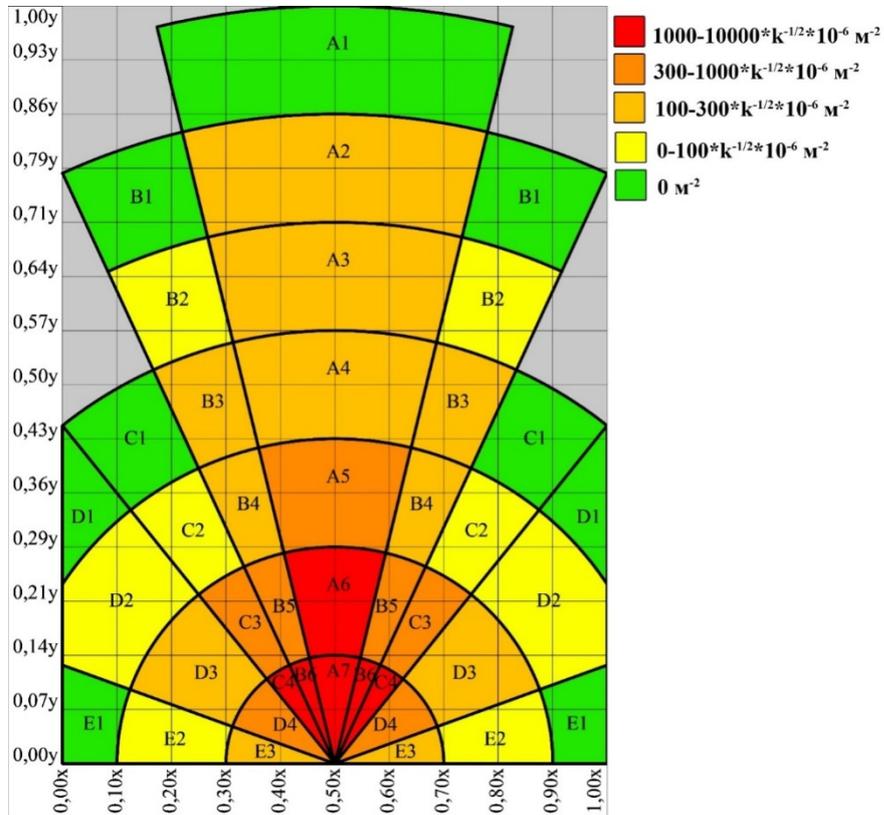


Рисунок 3.14 – Плотность вероятности полета обломков самолета

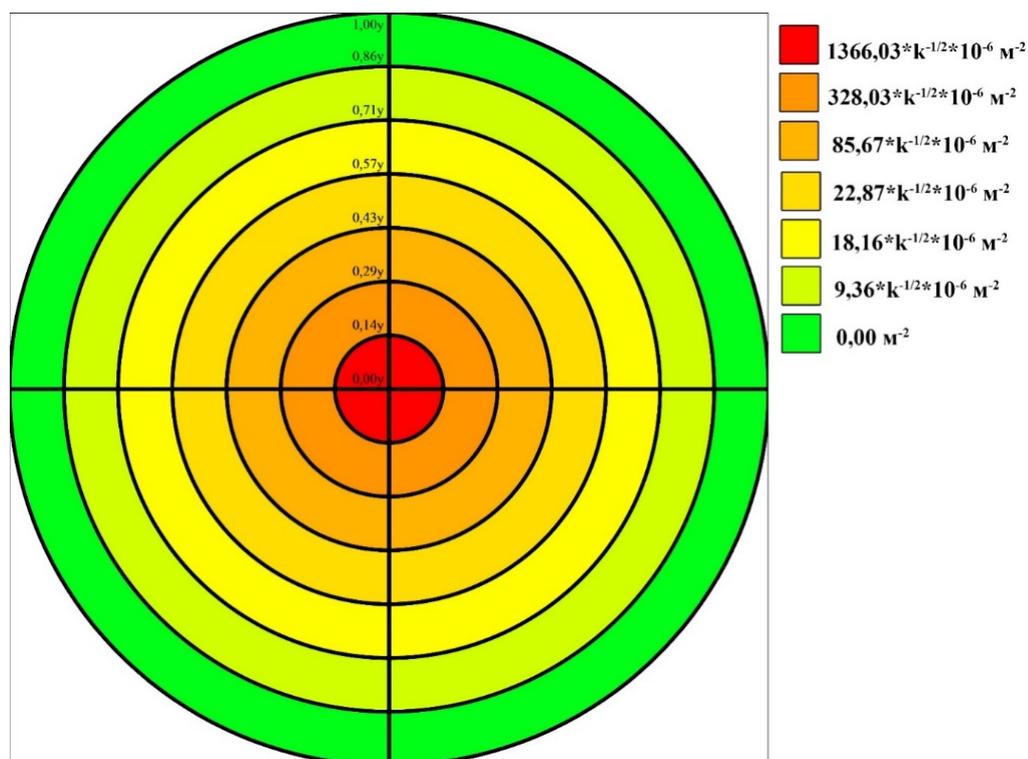


Рисунок 3.15 – Плотность вероятности полета обломков с учетом всех возможных горизонтальных углов падения самолета

Таблица 3.9 – Средняя высота полета обломков

Зона	Диапазон расстояний	Средняя высота полета обломков $h_3$ , м
1	(0,86-1,00)y	0,0
2	(0,71-0,86)y	1,56
3	(0,57-0,71)y	2,2
4	(0,43-0,57)y	3,02
5	(0,29-0,43)y	3,15
6	(0,14-0,29)y	4,09
7	(0,00-0,14)y	5,28

Кроме определения шаблона распределения вероятности разлета обломков требуется определить точку падения самолета относительно рассматриваемого ПОО (то есть необходимо выяснить, с какой точкой ПОО совмещать центр шаблона, изображенного на рисунке 3.15). Исходя из условия, что чем ближе резервуар находится к месту падения самолета, то тем выше вероятность его разрушения обломками, и допущения №2 п. 3.3.1, можно прийти к выводу, что центр шаблона должен быть

совмещен с центром тяжести последствий (ЦТП) катастрофы, вычисляемым по формулам (3.34) и (3.35):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad (3.34)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad (3.35)$$

где

$x_c, y_c$  – координаты ЦТП относительно принятых осей отсчета  $x_0, y_0$ ,

$V_i$  – объем  $i$ -го резервуара,

$x_i, y_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -го резервуара относительно принятых осей отсчета.

Площадь разлета обломков из допущения №2 п. 3.3.1, а также из условия, что все резервуары ПОО находятся в пределах зон 2–7 (согласно таблице 3.9 – то есть в зонах, в которых обломки представляют угрозу разрушения) можно вычислить по формуле (3.36), полученной из формулы (3.24)):

$$S_{об} = 0,076\pi u^2, \quad (3.36)$$

где

$u$  – расстояние от «центра тяжести последствий» до самого удаленного от него резервуара.

Построенный шаблон позволяет решить задачу расчета вероятности попадания обломка в любой объект заданной формы, находящийся в зоне авиакатастрофы.

Однако он не позволяет оценить вероятность разрушения данного объекта в результате попадания, а также не отражает информацию об энергии обломков и высотах, на которых они летят. Этот вопрос рассматривается в п. 3.3.3.

### **3.3.3 Моделирование попадания обломка самолета в резервуар методом конечных элементов**

На основе данных таблицы В.1, можно сделать вывод, что обломки во всех зонах авиакатастрофы летят на высотах 1–6 м с разными скоростями и разной плотностью. То

есть требуется оценить прочность используемых моделей вертикальных стальных резервуаров при динамическом ударе обломка самолета на указанном интервале высот. Для анализа наиболее опасного случая, в соответствии с допущением №2 п. 3.3.1, необходимо рассмотреть попадание в РВС обломка с максимальной массой.

При помощи рисунков 3.2, 3.4 и формулы (3.17) определим, что максимальная масса обломка при максимальной плотности разлета обломков равна:

$$m_{об} = \frac{M_c}{k_{об}} = \frac{167}{375} = 0,445 \text{ т.} \quad (3.37)$$

Примем следующие предположения о столкновении обломка с резервуаром:

- удар неупругий, то есть после столкновения обломок не отделяется от резервуара, а движется совместно с деформацией стенки РВС,
- вид деформированной системы при ударе в любой момент времени подобен виду деформированного состояния системы при статическом нагружении:

$$\frac{\delta_d}{\delta_{ст}} = k_d, \quad (3.38)$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{(v_{об}^r)^2}{g \delta_{ст}}}, \quad (3.39)$$

где

$\delta_d$  – горизонтальная деформация стенки РВС от динамической нагрузки,

$\delta_{ст}$  – горизонтальная деформация стенки РВС от статической нагрузки,

$k_d$  – динамический коэффициент;

- напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности так, что закон Гука при ударе сохраняет силу,
- потерей части энергии, перешедшей в теплоту колебания, пренебрегаем.

Проверку прочности резервуаров вертикальных стальных (РВС) проведем методом конечных элементов [19] в программном комплексе Лира-САПР 2013 R5.

Критерий разрушения резервуара – достижение эквивалентных напряжений (по энергетической теории прочности) значения предела текучести стали марки С245  $R_y = 24440 \text{ т/м}^2$ .

Величину фактического динамического коэффициента рассчитаем для минимальной скорости полета обломка  $v_{об}^r = 19$  м/с (согласно таблице В.1). Характеристики резервуаров приняты по [20, 21].

Результаты расчетов представлены в таблице В.2 и на рисунке 3.16. В ходе расчетов установлено, что процент наполненности резервуара не имеет значительного влияния на возникающие в конструкции максимальные эквивалентные напряжения от нагрузки, обусловленной попаданием обломка самолета – рисунок 3.17. Поэтому, для упрощения проводимых расчетов, нагрузка от хранящейся жидкости в резервуаре была исключена.

На основе данных таблицы В.2 можно сделать следующий вывод: даже при минимальной скорости движения обломка при попадании в любую точку (по высоте) почти все модели используемых резервуаров разрушаются.

Исключение представляет лишь РВС-50000 при попадании обломка в интервал высот от 2,5 м до 3,5 м. Однако, даже в этом случае запас прочности резервуара является минимальным (до 15%).

В связи с вышесказанным, для построения необходимой методики можно принять, что происходит полное разрушение резервуара любой модели при попадании в его любую точку обломка массой  $m_{об} = 0,445$  т, летящего с любой скоростью.

Таким образом, если проанализировать результаты исследований, изложенных в пунктах 3.3.2, 3.3.3, то можно сказать, что разлет обломков самолета представляет последствия, ведущие к каскадному развитию аварии первого порядка: инициализирующее событие (авиакатастрофа) и последующие за ним несколько второстепенных аварий первого порядка (разрушение резервуаров).

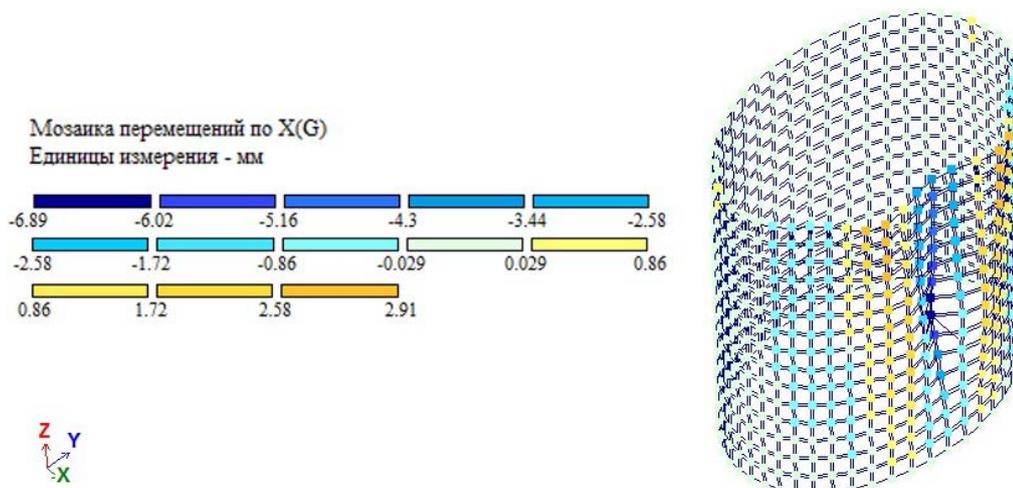
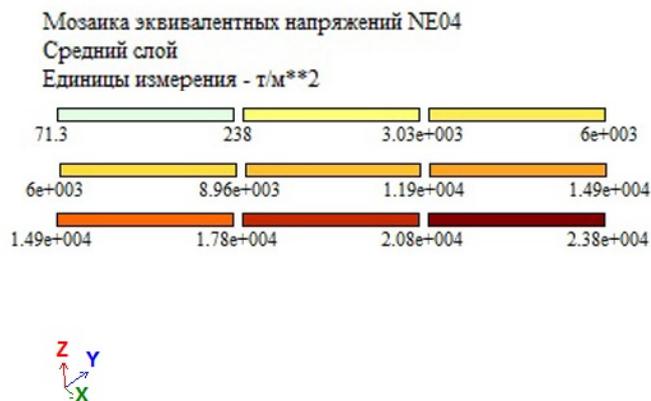


Рисунок 3.16 – Расчет прочности РВС-300. Деформации

а)



б)

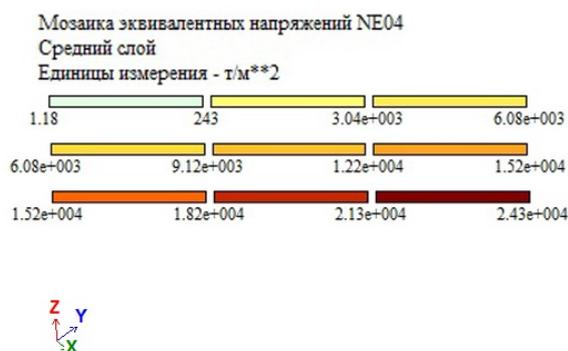


Рисунок 3.17 – Расчет прочности PVC-100: а) с нагрузкой от хранящегося вещества ( $\sigma = 23800 \text{ т/м}^2$ ), б) без нагрузки от хранящегося вещества ( $\sigma = 24300 \text{ т/м}^2$ )

Предложенный далее алгоритм позволяет оценить вероятность данного эффекта «ДОМИНО».

### 3.3.4 Алгоритм реализации разработанной методики

В результате проведенного исследования были получены все необходимые для разработки методики оценки риска данные за исключением базовой вероятности авиакатастрофы. Вычислим ее с помощью статистических данных, представленных в работе [8] – таблица 3.10.

Вероятность авиакатастрофы составляет:

$$p_a = \frac{N_a}{N_p} = \frac{347}{653000000} = 5,31 * 10^{-7} \text{год}^{-1}, \quad (3.40)$$

где

$p_a$  – базовая вероятность авиакатастрофы,

$N_a$  – количество авиакатастроф,

$N_p$  – количество авиарейсов за 2000–2014 гг.

Таблица 3.10 – Вероятность авиакатастрофы

Год	Количество рейсов	Количество авиакатастроф	Вероятность, %
2000	36000000	28	0,0000778
2001	37000000	24	0,0000649
2002	36000000	30	0,0000833
2003	34000000	21	0,0000618
2004	35000000	19	0,0000543
2005	38000000	23	0,0000605
2006	41000000	23	0,0000561
2007	44000000	19	0,0000432
2008	47000000	29	0,0000617
2009	46000000	26	0,0000565
2010	47000000	35	0,0000745
2011	50000000	32	0,000064
2012	52000000	18	0,0000346
2013	54000000	11	0,0000204
2014	56000000	9	0,0000161
Итого	653000000	347	0,0000531

Таким образом, алгоритм применения методики состоит из следующих этапов.

- 1) Сформировать исходные данные. В соответствии с принятыми в п. 3.3.1 допущениями примем следующие значения исходных данных – таблица 3.11.

Таблица 3.11 – Исходные данные для расчета

Параметр	Обозначение величины	Значение	Обозначение вероятности	Вероятность
Масса пустого самолета	$M_c$	167 т	$p_{m.c}$	0,117
Масса топлива	$m_m$	112,5 т	$p_{m.m}$	0,034
Количество обломков	$k_{об}$	375	$p_{k.об}$	0,1
Масса обломка	$m_{об}$	0,445 т	-	-
Высота самолета	$H_c$	11,25 м	$p_{в.c}$	0,2833
Площадь разлета обломков	$S_{об}$	См. доп. 3	$p_{п.об}$	См. доп. 3
Расстояние от ВПП	$R$	См. доп. 4	$p_p$	См. доп. 4
Место авиакатастрофы	-	См. доп. 5	$p_{м.а.}$	См. доп. 5
Пожар	-	-	$p_n$	0,739
Взрыв	-	-	$p_в$	0,37
В качестве генеральной выборки для определения необходимых статистических данных выбран рейтинг самых крупных авиакатастроф (таблицы А.1–А.3).	-	-	$p_y$	0,59

- 2) Определить ЦТП рассматриваемого ПОО по формулам (3.34) и (3.35).
- 3) Вычислить площадь разлета обломков по формуле (3.36). Определить при помощи таблицы 3.6 вероятность  $p_{п.об}$ .
- 4) Определить расстояние от ВПП ближайшего аэропорта до ЦТП рассматриваемого ПОО. Определить при помощи таблицы 3.1 вероятность  $p_p$ .
- 5) Вычислить площадь зоны, в которой находится рассматриваемый ПОО. Вычислить вероятность авиакатастрофы в данном месте по формуле:

$$p_{м.а.} = \frac{S_{об}}{S_3}, \quad (3.41)$$

где

$S_3$  – площадь зоны нахождения ПОО.

- 6) Определить площадь разлития топлива по формуле (3.19).

- 7) Определить массу топливно-воздушной смеси по формуле (3.20).
- 8) Рассчитать вероятность разрушения каждого резервуара от обломков самолета по формуле:

$$P_p^i = p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{в.с} * p_{м.с} * p_{к.об} * p_{п.об} * P_{об}^i, \quad (3.42)$$

где

$P_p^i$  – вероятность разрушения  $i$ -го резервуара в результате попадания обломка самолета,

$P_{об}^i$  – вероятность попадания обломка самолета в  $i$ -й резервуар, вычисляемая по формуле (3.31).

- 9) Рассчитать вероятность пожара разлитого авиационного топлива по формуле:

$$P_{п} = p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{м.т} * p_{п}, \quad (3.43)$$

где

$P_{п}$  – вероятность пожара разлитого авиационного топлива в месте падения самолета.

- 10) Рассчитать вероятность взрыва ТВС по формуле:

$$P_{в} = p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{м.т} * p_{в}, \quad (3.44)$$

где

$P_{в}$  – вероятность взрыва ТВС в месте падения самолета.

- 11) Оценить последствия разлета обломков самолета, пожара и взрыва топлива.

С целью демонстрации реализации предлагаемой методики рассмотрим оценка риска разрушения резервуарного парка с керосином, расположенного в непосредственной близости от взлетно-посадочной полосы аэропорта.

### 3.4 Реализация методики на примере реального ПОО авиационной инфраструктуры

#### 3.4.1 Характеристика резервуарного парка

Объект: резервуарный парк для хранения керосина, аэропорт. Основное назначение резервуарного парка – прием, хранение и передача керосина в аэропорт для заправки воздушных судов. Керосин хранится на ПОО в 14 резервуарах РВС-5000 объемом  $V_p = 5000 \text{ м}^3$  каждый согласно требованиям, изложенным в работе [6], приложение №1. Месторасположение и ситуационный план объекта изображены на рисунках 3.18, 3.19. Размеры каждого резервуара: диаметр  $D_p = 21 \text{ м}$ , высота  $H_p = 15 \text{ м}$ . Крыша резервуара – стационарная, газовая подвязка – отсутствует. В соответствии с работой [22], п. 2.2, коэффициент заполнения резервуара должен быть не более  $\alpha_{\text{жф}} = 0,95$ . Масса керосина, содержащаяся в одном резервуаре:

$$M_p = \rho_k * V_k * \alpha_{\text{жф}} = 0,805 * 5000 * 0,95 = 3823,75 \text{ т.} \quad (3.45)$$

Общая масса керосина в резервуарном парке:

$$M_k = n * M_p = 14 * 3823,75 \text{ т,} \quad (3.46)$$

где

$M_p$  – масса керосина, содержащаяся в одном резервуаре,

$M_k$  – масса керосина, содержащаяся во всем резервуарном парке,

$\rho_k = 0,805 \text{ т/м}^3$  – плотность керосина,

$n = 14$  – количество резервуаров.

#### 3.4.2 Обвалование резервуаров

Расчетный объем обвалования должен быть не менее одного самого большого в группе резервуара. Основная расчетная формула обвалования:

$$V_{\text{расч}} \geq V_{\text{max.рез}} \quad (3.47)$$

где

$V_{\text{расч}}$  – расчетный объем обвалования,

$V_{\text{max,рез}}$  – объем наибольшего резервуара в группе.

Резервуарный парк разделен на четыре группы резервуаров. Определим глубину обвалования каждой группы резервуаров, исходя из требования 3.47 и геометрических размеров обвалования, указанных на рисунке 3.18. Ширина отмостки резервуаров – 1 м. Высоту обвалования определим по формуле:

$$H_{\text{об}} = \frac{V_{\text{об}}}{S_{\text{об}}}, \quad (3.48)$$

$$S_{\text{об}} = A * B - S_{\text{р}} = A * B - \frac{\pi * (D_{\text{р}} + 2)^2}{4}, \quad (3.49)$$

где

$H_{\text{об}}$  – высота обвалования,

$V_{\text{об}}$  – объем обвалования, равный объему резервуара РВС-5000,

$S_{\text{об}}$  – полезная площадь обвалования,

$A, B$  – ширина и длина обвалования,

$S_{\text{р}}$  – площадь основания одного резервуара.

1. Определим высоту обвалования группы резервуаров с размерами обвалования (80×45 м):

$$S_{\text{об1}} = 80 * 45 - \frac{3,14 * (21 + 2)^2}{4} = 3184,74 \text{ м}^2, \quad (3.50)$$

$$H_{\text{об1}} = \frac{V_{\text{об}}}{S_{\text{об1}}} = \frac{5000}{3184,74} = 1,57 \text{ м}. \quad (3.51)$$

В соответствии с требованиями [23] проектная высота обвалования должна быть не менее 1 м и с запасом не менее 0,2 м. Таким образом,  $H_{\text{об1}} = 1,8 \text{ м}$ .

2. Определим высоту обвалования группы резервуаров с размерами обвалования (145×40 м):

$$S_{062} = 145 * 40 - \frac{3,14*(21+2)^2}{4} = 5384,74 \text{ м}^2, \quad (3.52)$$

$$H_{062} = \frac{5000}{5384,74} = 0,93 \text{ м.} \quad (3.53)$$

Таким образом,  $H_{062} = 1,2$  м.

3. Определим высоту обвалования группы резервуаров (95×85 м) с размерами обвалования:

$$S_{063} = 95 * 85 - \frac{3,14*(21+2)^2}{4} = 7659,74 \text{ м}^2, \quad (3.54)$$

$$H_{063} = \frac{5000}{7659,74} = 0,66 \text{ м.} \quad (3.55)$$

Таким образом,  $H_{063} = 1$  м.

4. Определим высоту обвалования группы резервуаров с размерами обвалования (125×80 м):

$$S_{064} = 125 * 80 - \frac{3,14*(21+2)^2}{4} = 9584,74 \text{ м}^2, \quad (3.56)$$

$$H_{064} = \frac{5000}{9584,74} = 0,53 \text{ м.} \quad (3.57)$$

Таким образом,  $H_{064} = 1$  м.



Рисунок 3.18 – Месторасположение резервуарного парка



Рисунок 3.19 – Ситуационный план резервуарного парка

### 3.4.3 Расчет вероятности разрушения ОПО

Выполним расчет вероятности разрушения рассматриваемого резервуарного парка в соответствие с алгоритмом, разработанным в п. 3.3.4.

- 1) Исходные данные представлены в таблице 3.11.
- 2) Определение ЦТП резервуарного парка по формулам (3.34) и (3.35) относительно произвольно выбранных осей отсчета:

$$\begin{aligned}x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i} = & \frac{5000 * (10,5 + 49,98 + 44,1 + 128,34 + 122,04)}{5 * 5000} \\ & + \frac{5000 * (168,99 + 162,69 + 206,61 + 200,31 + 116,3)}{5 * 5000} \\ & + \frac{4 * (180,05 + 220,05 + 131,05 + 137,96)}{4 * 5000} = 120,78 \text{ м},\end{aligned}\quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i} = & \frac{5000 * (80,27 + 75,33 + 35,75 + 64,26 + 21,75)}{5 * 5000} \\ & + \frac{5000 * (58,2 + 15,73 + 53,02 + 10,5 + 140,52)}{5 * 5000} \\ & + \frac{4 * (131,42 + 125,36 + 210,81 + 247,96)}{4 * 5000} = 81,69 \text{ м}.\end{aligned}\quad (3.59)$$

ЦТП резервуарного парка показан на рисунке 3.20.

- 3) Вычисление площади разлета обломков по формуле (3.36):

$$S_{об} = 0,076\pi y^2 = 0,076 * 3,14 * 167,74^2 = 6714,54 \text{ м}^2, \quad (3.60)$$

где

$y = 167,74$  м – расстояние от ЦТП до резервуара №14, согласно рисунку 3.20.

Вероятность  $p_{п.об} = 0,5$  определена на основе таблицы 3.6.

- 4) Расстояние от ближайшей ВПП аэропорта до резервуарного парка составляет  $R = 1,53$  км; вероятность  $p_p = 0,492$  определена на основе таблицы 3.1. Расчет вероятности сценария с учетом двух ВПП не требуется, так как приведет к таким же результатам.

5) Вероятность авиакатастрофы в данном месте определяется по формуле (3.41):

$$p_{\text{м.а.}} = \frac{S_{\text{об}}}{S_3} = \frac{6714,54}{3,14*5000^2} = 9 * 10^{-5}, \quad (3.61)$$

где

$S_3$  – площадь зоны с радиусом  $R = 5000$  м.

6) Определение площади разлития топлива по формуле (3.19):

$$S_{\text{т}} = \frac{V_{\text{т}}}{t_{\text{т}}} = \frac{m_{\text{т}}}{\rho_{\text{т}}*t_{\text{т}}} = \frac{112,5}{0,805*0,03} = 4658,39 \text{ м}^2. \quad (3.62)$$

7) Определение массы топливно-воздушной смеси по формуле (3.20):

$$m_{\text{ТВС}} = 0,1m_{\text{т}} = 0,1 * 112,5 = 11,25 \text{ т}. \quad (3.63)$$



Рисунок 3.20 – Определение параметров резервуарного парка

8) Расчет вероятности разрушения каждого резервуара от обломков самолета выполнен по формуле (3.42) и приведен в таблице 3.12. Пример расчета для резервуара №8:

$$\begin{aligned}
P_p^8 &= p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{в.с} * p_{м.с} * p_{к.об} * p_{п.об} * P_{об}^8 = \\
&= 5,31 * 10^{-7} * 0,59 * 0,492 * 9 * 10^{-5} * 0,2833 * 0,117 * 0,1 \\
&* 0,5 * 1 = 2,3 * 10^{-14} \text{ год}^{-1},
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$P_{об}^8 = \min(p_3 * S_{пр} * k_{об}; 1), \tag{3.65}$$

$$S_{пр} = d_p * h_{пр} = 10,22 * 3,15 = 32,19 \text{ м}^2, \tag{3.66}$$

$$h_{пр} = \min(h_p; h_3) = (12; 3,15) = 3,15 \text{ м}, \tag{3.67}$$

где

$p_3$  – плотность вероятности попадания обломка самолета в зоне №5, определенная по рисунку 3.21,

$d_p$  – ширина открытой части проекции, определенная по рисунку 3.20,

$h_p$  – высота резервуара РВС-5000,

$h_3$  – средняя высота полета обломков в зоне с координатами (0,29–0,43)у, определенная по таблице 3.9 и рисунку 3.21.

9) Расчет вероятности пожара разлитого авиационного топлива по формуле (3.43):

$$\begin{aligned}
P_{п} &= p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{м.т} * p_{п} = \\
&= 5,31 * 10^{-7} * 0,59 * 0,492 * 9 * 10^{-5} * 0,034 * 0,739 = \\
&= 0,35 * 10^{-12} \text{ год}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

10) Расчет вероятности взрыва ТВС по формуле (3.44):

$$\begin{aligned}
P_{в} &= p_a * p_y * p_p * p_{м.а.} * p_{м.т} * p_{в} = \\
&= 5,31 * 10^{-7} * 0,59 * 0,492 * 9 * 10^{-5} * 0,034 * 0,37 = \\
&= 0,17 * 10^{-12} \text{ год}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

11) Оценка последствий разлета обломков самолета, пожара и взрыва топлива выполнена в п. 3.4.4.

Таблица 3.12 – Расчет вероятности попадания обломков самолета в резервуары

№ РВС	Модель	Координаты центра от начала отсчета, м		Расстояние от ЦТП, м	Зона по таблице 3.9	Открытая ширина проекции, м	Высота проекции, м	Площадь проекции, м <sup>2</sup>	Плотность обломков, * 10 <sup>-6</sup> м <sup>-2</sup>	Расчет по формуле (3.31)	Расчет по формуле (3.42), * 10 <sup>-14</sup>
		x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>								
1	PBC-5000	10,5	80,27	124,14	3	5,74	2,2	12,63	25,26	0,12	0,28
2	PBC-5000	49,98	75,33	85,69	4	21	3,02	63,42	31,81	0,76	1,75
3	PBC-5000	44,1	35,75	105,61	4	21	3,02	63,42	31,81	0,76	1,75
4	PBC-5000	128,34	64,26	27,16	7	21	5,28	110,88	1900,15	1	2,3
5	PBC-5000	122,04	21,75	70,1	5	0	3,15	0	119,17	0	0
6	PBC-5000	168,99	58,2	47,65	6	21	4,09	85,89	456,29	1	2,3
7	PBC-5000	162,69	15,73	80,27	5	11,71	3,15	36,89	119,17	1	2,3
8	PBC-5000	206,61	53,02	81,63	5	10,22	3,15	32,19	119,17	1	2,3
9	PBC-5000	200,31	10,5	103,98	4	0	3,02	0	31,81	0	0
10	PBC-5000	116,3	140,52	52,88	6	21	4,09	85,89	456,29	1	2,3
11	PBC-5000	180,05	131,42	61,23	5	21	3,15	66,15	119,17	1	2,3
12	PBC-5000	220,05	125,36	92,55	4	21	3,02	63,42	31,81	0,76	1,75
13	PBC-5000	131,05	210,81	120,08	3	18,95	2,2	41,69	25,26	0,39	0,9
14	PBC-5000	137,96	247,96	157,23	2	3,83	1,56	5,97	13,02	0,03	0,07

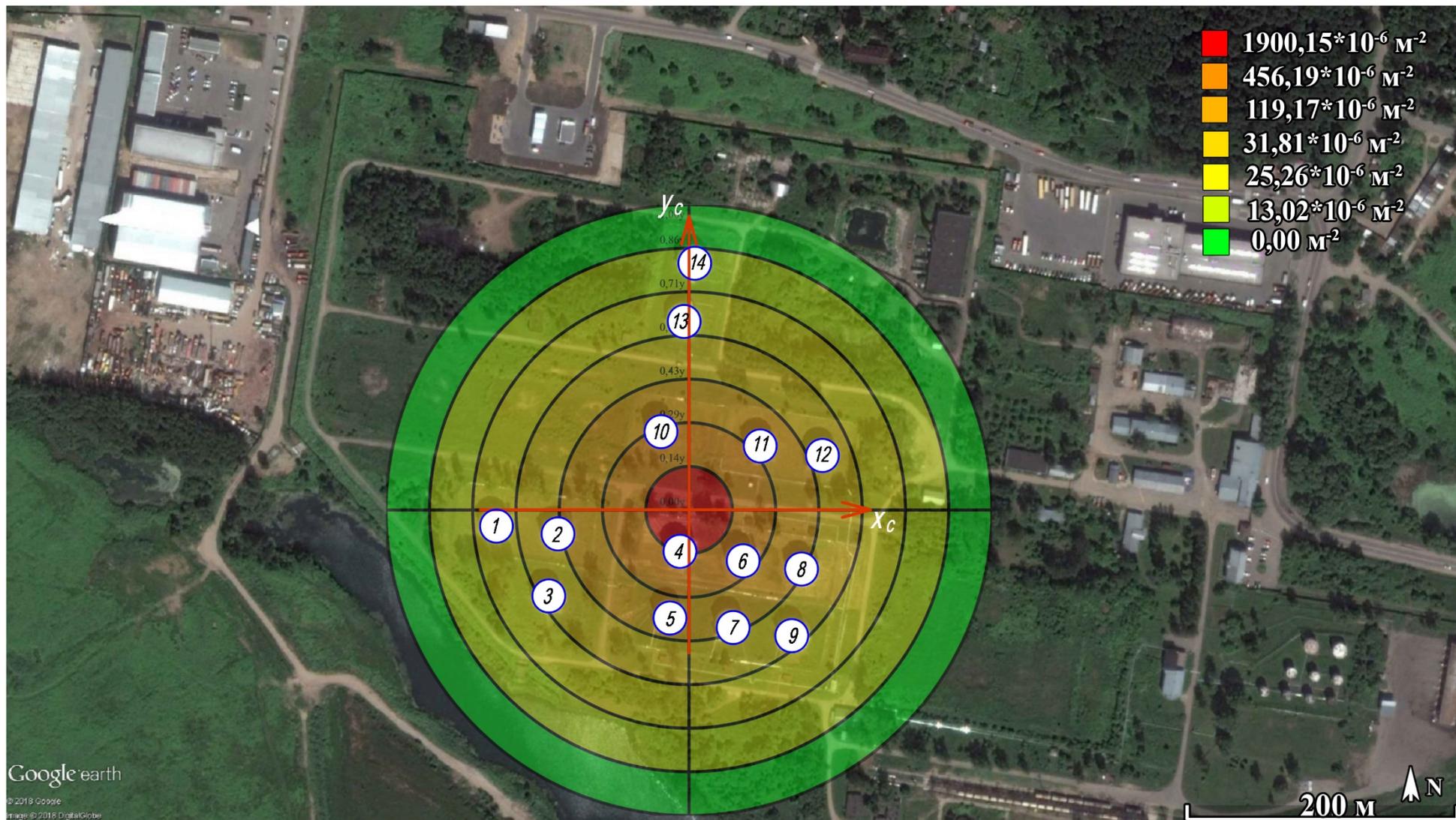


Рисунок 3.21 – Зона разлета обломков самолета

### 3.4.4 Оценка последствий и выводы

Согласно проведенным расчетам, в результате потенциальной авиакатастрофы с различными вероятностями могут быть разрушены попаданием обломков самолета все резервуары кроме №5, №9 (данные резервуары закрыты от попадания). Также, вероятно возникновение пожара разлитого топлива площадью  $S_c = 4658,39 \text{ м}^2$  и взрыва ТВС массой  $m_{\text{ТВС,с}} = 11,25 \text{ т}$ .

Сценарий с возникновением единственного пожара пролива топлива самолета и взрыва ТВС, сформированного только топливом самолета (иными словами, если бы самолет разбился в дали от любого объекта, содержащего горючие вещества) исключается из дальнейшего анализа, так как разлитое/испарившееся топливо из резервуаров вызовет наиболее опасный сценарий развития катастрофы: из разрушенных от обломков резервуаров высвобождается ТВС, находившаяся между верхним уровнем топлива и крышей резервуара – формируется общее облако ТВС из всех разрушенных резервуаров и испарившегося/разбрызганного топлива самолета.

При возникновении взрыва, происходит возгорание разлитого топлива из резервуаров и самолета. Пожар пролива формируется всеми группами резервуаров (а также разлитым топливом самолета), так как обвалование каждой группы резервуаров вмещает содержимое только одного резервуара – следовательно, большая часть от всего разлитого топлива выйдет за пределы обвалования.

Таким образом, необходимо определить величину поражающих факторов последствий авиакатастрофы – тепловое воздействие пожара всего разлитого топлива и избыточное давление во фронте воздушной ударной волны от взрыва ТВС всего разлитого топлива.

Вычислим площадь разлития топлива в каждой группе резервуаров и массу ТВС, содержащейся в каждом резервуаре.

Определим площадь разлития топлива в каждой группе резервуаров по формуле:

$$S_c = \frac{V_m - (A * B - S_p) * H_{об}}{t_m}, \quad (3.70)$$

где

$S_r$  – площадь разлития в данной группе резервуаров,

$V_T$  – объем разлитого топлива,

$A, B$  – ширина и длина обвалования,

$S_p$  – площадь неразрушенных в группе резервуаров,

$H_{об}$  – высота обвалования,

$t_T = 0,03$  м – толщина слоя разлития керосина в соответствии с допущением №7 п.

### 3.3.1.

Площадь пожара разлива в группе резервуаров с размерами обвалования (80×45 м) – группа №1:

$$S_{r1} = \frac{10000 * 0,95 - (80 * 45 - 0) * 1,8}{0,03} = 100666,67 \text{ м}^2. \quad (3.71)$$

Площадь пожара разлива в группе резервуаров с размерами обвалования (145×40 м) – группа №2:

$$S_{r2} = \frac{15000 * 0,95 - (145 * 40 - 0) * 1,2}{0,03} = 243000 \text{ м}^2. \quad (3.72)$$

Площадь пожара разлива в группе резервуаров с размерами обвалования (95×85 м) – группа №3:

$$S_{r3} = \frac{15000 * 0,95 - (95 * 85 - 0) * 1}{0,03} = 205833,34 \text{ м}^2. \quad (3.73)$$

Площадь пожара разлива в группе резервуаров с размерами обвалования (125×80 м) – группа №4:

$$S_{r4} = \frac{20000 * 0,95 - (125 * 80 - 830,53) * 1}{0,03} = 327684,34 \text{ м}^2. \quad (3.74)$$

Общая площадь пожара пролива составляет:

$$\begin{aligned} S_{пр} &= S_{r1} + S_{r1} + S_{r1} + S_{r1} + S_c = \\ &= 100666,67 + 243000 + 205833,34 + 327684,34 + 4658,39 = 881842,74 \text{ м}^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Масса паров керосина, содержащаяся в одном резервуаре, вычисляется по формуле [24]:

$$m_k = \rho_k \alpha_{ГФ} V_p c_k = 5,41 * 0,05 * 5000 * 0,116 = 0,157 \text{ т}, \quad (3.76)$$

$$c_k = \frac{p_n}{p_n + p_v} = \frac{13,3}{13,3 + 101,3} = 0,116, \quad (3.77)$$

$$\rho_k = \frac{M_\mu T_0}{V_\mu T} = \frac{130}{22,4} * \frac{273}{293} = 5,41 \text{ кг/м}^3, \quad (3.78)$$

где

$\rho_k$  – плотность паров керосина,

$\alpha_{ГФ} = 0,05$  – доля газовой фазы в резервуаре,

$V_p = 5000 \text{ м}^3$  – объем резервуара,

$c_k$  – объемная концентрация паров керосина,

$p_n = 13,3 \text{ кПа}$  – давление состояния насыщения при температуре хранения,

$p_v = 101,3 \text{ кПа}$  – атмосферное давление воздуха,

$M_\mu = 130 \text{ кг/кмоль}$  – молярная среднефракционная масса паров керосина,

$V_\mu = 22,4 \text{ м}^3/\text{кмоль}$  – молярный объем паров керосина,

$T_0 = 273 \text{ К}$  – стандартная температура,

$T = 293 \text{ К}$  – температура хранения керосина.

Общая масса ТВС составляет:

$$m_{\text{ТВС}} = n * m_k + m_{\text{ТВС,с}} = 12 * 0,157 + 11,25 = 13,134 \text{ т}, \quad (3.79)$$

где

$n = 12$  – количество разрушенных обломками резервуаров.

Критерии разрушения резервуаров от воздействия поражающих факторов приняты по работам [25]–[28]. Центр пожара пролива и взрыва ТВС определяется по формулам (3.34), (3.35) без учета неразрушенных обломками резервуаров:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{5000 * (10,5 + 49,98 + 44,1 + 128,34)}{4 * 5000} \\ &+ \frac{5000 * (168,99 + 162,69 + 206,61 + 116,3)}{4 * 5000} \\ &+ \frac{5000 * (180,05 + 220,05 + 131,05 + 137,96)}{4 * 5000} = 129,72 \text{ м}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

Вычислим величину поражающих факторов взрыва ТВС и пожара пролива при помощи модулей «Взрыв ТВС» и «Пожар пролива» ПК ТОХI+Risk 4.3.0 [29] – таблицы 3.13, 3.14, рисунки 3.22, 3.23.

Таблица 3.13 – Результаты расчета модуля «Взрыв ТВС»

Повреждения/ранения	Избыточное давление, кПа	Расстояние, м
<b>Здания</b>		
Полное разрушение	100	0
Средние повреждения	28	0
Умеренные повреждения (повреждение внутренних перегородок, рам и т.п.)	12	87,4
Малые повреждения (разбита часть остекления)	3	532,36
<b>Резервуары</b>		
Полное разрушение	90	0
Сильное повреждение	80	0
Среднее повреждение	55	0
Слабое повреждение	35	0
<b>Люди</b>		
Люди, находящиеся в неукрепленных зданиях, погибнут в результате прямого поражения УВ, под развалинами зданий или вследствие удара о твердые предметы	190	0
Наиболее вероятно, что все люди, находящиеся в неукрепленных зданиях, либо погибнут, либо получат серьезные повреждения в результате действия взрывной волны, либо при обрушении здания или перемещении тела взрывной волной	69	0
Люди, находящиеся в неукрепленных зданиях, либо погибнут или получат серьезные повреждения барабанных перепонки и легких под действием взрывной волны, либо будут поражены осколками и развалинами здания	55	0
Обслуживающий персонал получит серьезные повреждения с возможным летальным исходом в результате поражения осколками, развалинами здания, горящими предметами и т.п. Имеется 10%-я вероятность разрыва барабанных перепонки	24	0
Возможна временная потеря слуха или травмы в результате вторичных эффектов взрывной волны, таких, как обрушение зданий, и третичного эффекта переноса тела	16	0
С высокой надежностью гарантируется отсутствие летального исхода или серьезных повреждений	5,9	250,06

Таблица 3.14 – Результаты расчета модуля «Пожар пролива»

Повреждения/ранения	Тепловая нагрузка, кВт/м <sup>2</sup>	Расстояние, м
<b>Резервуары (при длительности пожара пролива 10 мин и более)</b>		
Полное разрушение за короткий промежуток времени	40	529,81
Разлитие всего содержимого резервуара за 10 мин. с постоянной скоростью	20	616,5
Разлитие содержимого резервуара через отверстие диаметром 10 мм	8	949,11
<b>Люди</b>		
Непереносимая боль через 3–5 с.	10,5	845,6
Непереносимая боль через 20 с.	7	1000,43
Безопасно для человека в брезентовой одежде	4,2	1208,37
Без негативных последствий	1,4	1723,02

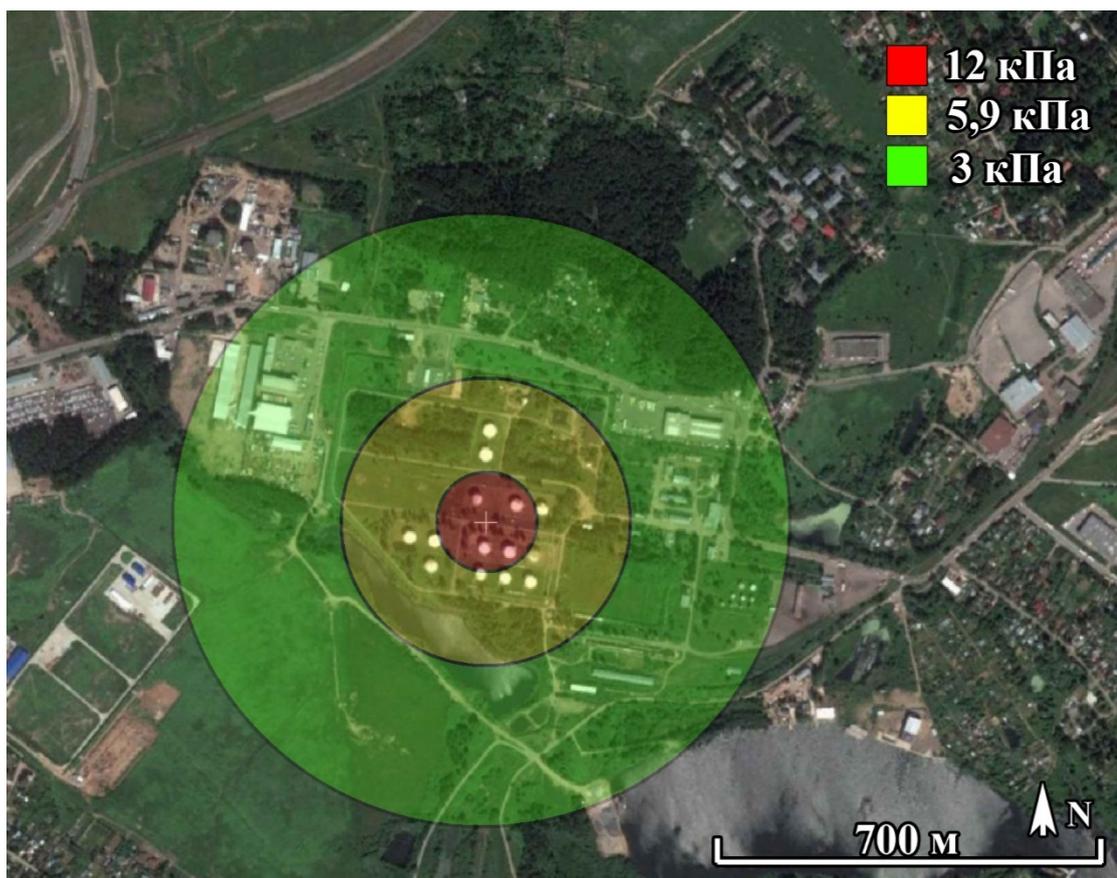


Рисунок 3.22 – Результаты расчета модуля «Взрыв ТВС»

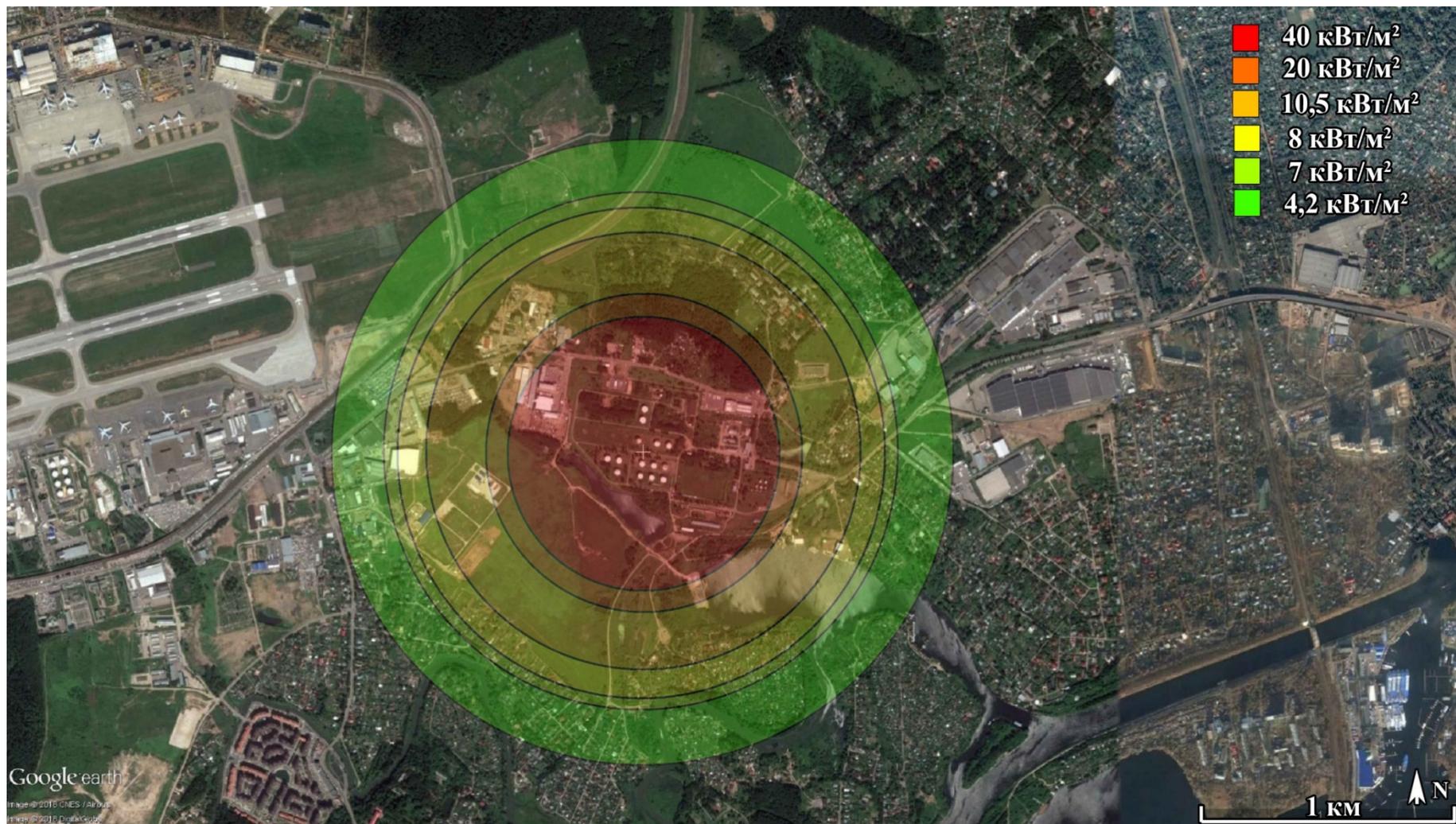


Рисунок 3.23 – Результаты расчета модуля «Пожар пролива»

Как видно из рисунков 3.22, 3.23, взрыв ТВС не представляет значительной угрозы резервуарам №5 и №9, так как во фронте воздушной ударной волны не достигается избыточное давление, способное нанести даже слабые повреждения наземным резервуарам. Однако, для людей взрыв представляет опасность на расстоянии до 250 м.

В отличие от взрыва ТВС, тепловое воздействие пожара пролива представляет серьезную угрозу для людей и резервуаров, так как происходит разлитие большого количества горючих веществ на значительной площади. Последствия от этого поражающего фактора катастрофы представляют опасность для незащищенного человека даже на расстоянии до 1200 м. Резервуары №5 и №9 находятся в зоне с тепловым излучением, равным  $40 \text{ кВт/м}^2$ . При длительном воздействии теплового потока такой интенсивности (более 10 минут) наземные резервуары полностью разрушатся за короткий промежуток времени [26]. Иначе говоря, в результате авиакатастрофы будут уничтожены все резервуары: 12 резервуаров – первичными поражающими факторами (обломки самолета), 2 резервуара – вторичными поражающими факторами (тепловое излучение пожара пролива).

Таким образом, можно прийти к выводу, что главный первичный поражающий фактор авиакатастрофы – разлет обломков самолета. В баках самолета к моменту авиакатастрофы, остается незначительное количество топлива, которое неспособно вызвать сильный взрыв ТВС или пожар пролива большой площади. Главный вторичный поражающий фактор авиакатастрофы (при крушении на территории опасного производственного объекта) – пожар пролива топлива, высвобожденного из разрушенных обломками резервуаров. Масса ТВС, содержащаяся в резервуарах, очень мала и поэтому не может вызвать значительных разрушений.

Низкая величина вероятности рассмотренного сценария обусловлена несколькими главными причинами:

- 1) Базовая вероятность авиакатастрофы очень мала.
- 2) Вероятность авиакатастрофы именно в данном рассматриваемом месте очень мала.
- 3) Авиакатастрофа представляет собой большое количество случайных величин, каждая из которых имеет сильное влияние на ее последствия – то есть, для анализа одного конкретного сценария необходимо определить несколько величин и их вероятности, которые в итоге, уменьшают конечную вероятность данного сценария. Иначе говоря, при уточнении каких-либо величин (или добавлении новой величины), общая вероятность сценария уменьшается. Однако, проведенный расчет представляет всего один сценарий из

общего количества – то есть, суммарная вероятность различных поражающих факторов выше, чем при учете единственного сценария авиакатастрофы.

### 3.5 Заключение к разделу 3

Разработан метод количественной оценки риска разрушения опасного производственного объекта, обусловленного потенциально возможными авиакатастрофами. Предложенный метод расчета учитывает вероятности всех возможных поражающих факторов, возникающих при крушении воздушного судна – разлет обломков, взрыв ТВС разлитого топлива, пожар пролива.

Анализ научной литературы по данному вопросу показал, что на сегодняшний день не разработано методик расчета риска, описанного выше.

Достоверность рассчитанных вероятностей различных параметров авиакатастроф подтверждена сравнением с источниками статистических данных, собранных по 376 авиакатастрофам.

Проведение эксперимента методом Монте-Карло, основанного на анализе собранных статистических данных (в частности, снимках с мест авиакатастроф), позволило построить шаблон пространственного распределения вероятности разлета обломков с учетом всех возможных форм площади разлета; любых направлений падения самолета; любых величин площади разлета – то есть были учтены все факторы, влияющие на вероятность разрушения объектов ПОО.

Выполнена оценка прочности наиболее часто используемых вертикальных резервуаров (от РВС-100 до РВС-50000) методом численного моделирования. Критерием разрушения резервуара выбрано достижение эквивалентных напряжений в оболочке резервуара значений, равных пределу текучести стали. В ходе расчетов установлено, что попадание обломка, летящего с любой возможной скоростью (согласно статистическим данным), в любую точку резервуара приводит к разрушению РВС.

В результате проведенных исследований построен алгоритм применения разработанной методики со ссылками на приведенные ранее расчеты.

На основе предложенной методики выполнен расчет вероятности разрушения резервуарного парка, расположенного на расстоянии 1,53 км от края взлетно-посадочной полосы аэропорта Шереметьево, г. Москва; а также был проанализирован эффект «домино» и его возможные последствия. В результате расчетов установлено, что наибольшую опасность при авиакатастрофе представляет разлет обломков самолета.

Таким образом, при проектировании ПОО возможно учесть опасные свойства территории, окружающей ПОО, путем расчета величины рисков, обусловленных природными факторами и факторами авиационной инфраструктуры: землетрясениями, наводнениями, грозами и авиакатастрофами. Влияние прочих природных явлений и иных технологических катастроф остается открытым вопросом для дальнейших исследований.

**Научная новизна.** Впервые предложен метод количественной оценки риска разрушения опасного производственного объекта вследствие авиакатастрофы, построенный на основе собранных статистических данных и принятых численных моделях. Разработан шаблон распределения пространственной вероятности разрушения РВС вследствие попадания обломка самолета по результатам моделирования методами ММК и МКЭ.

**Практическая значимость работы.** Построенный метод количественной оценки риска позволяет определить вероятность разрушения ПОО вследствие воздействия поражающих факторов авиакатастрофы: разлета обломков воздушного судна, теплового излучения пожара разлитого авиатоплива, избыточного давления во фронте ударной волны взрыва ТВС разлитого топлива. Предложенный порядок построения шаблона пространственного распределения вероятности разрушения резервуара вследствие динамического удара обломка воздушного судна может быть использован для разработки шаблона разлета обломков любого происхождения (например, взрыва бомбы в случае террористического акта и т.д.).

## **4 Энтропийный метод распознавания и анализа динамической информации о состоянии сложных региональных систем**

### **4.1 Введение**

Сложные системы характеризуются тем, что взаимодействие их элементов (подсистем) нельзя или крайне затруднительно представить в явном виде. С учетом этого в качестве инструментария используется векторное представление дифференциальной энтропии. Дифференциальная энтропия является функционалом плотности вероятности случайного вектора и поэтому содержит в себе информацию о многомерной стохастической системе. Однако в явном виде здесь не учитывается риск систем. Поэтому необходимо дополнить инструментарий моделью многомерного риска и рассматривать проблему распознавания состояния сложных систем на основе энтропийно-вероятностного моделирования.

Цель данного этапа – разработка методов мониторинга состояния сложных систем на основе энтропийно-вероятностного моделирования. Будут рассмотрены следующие вопросы:

- 1) Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития на примере территорий.
- 2) Энтропийное моделирование дискретных случайных векторов на примере группировок и балльных показателей.
- 3) Моделирование риска в неоднородных стохастических системах.
- 4) Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей.

### **4.2 Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития на примере территорий**

В последние годы стала актуальной проблема устойчивого развития. Однако многие авторы указывают на концептуальную сложность, которая заключается в том что, понятие «устойчивое развитие» включает в себя два термина «развитие» и «устойчивость». При этом каждый из этих терминов трактуется не однозначно. Это приводит к появлению разных трактовок устойчивого развития применительно к конкретным системам.

Понятие энтропии характеризует системные закономерности, и в целом может характеризовать систему с точки зрения ее развития. Однако вопросы устойчивости связаны с вопросами безопасности и риска. Поэтому необходимо включить в рассмотрение вопросы риск-анализа. Ниже описана модель многомерного риска, рассмотрены вопросы ее использования в задачах мониторинга и управления стохастическими системами. Предложена новая концепция устойчивого развития систем. Согласно этой концепции под устойчивым развитием сложной многомерной системы будем понимать динамику, состоящую в наличии тенденции сбалансированного изменения энтропий хаотичности и самоорганизации при сохранении приемлемого уровня риска многомерного риска.

#### 4.2.1 Введение

Термин «устойчивое развитие» впервые был применен в 1972 г. на Первой Всемирной конференции по окружающей среде в Стокгольме. В 1987 г. в докладе «Наше общее будущее» Международной комиссии ООН по окружающей среде и развитию (МКОСР), которую возглавила премьер-министр Норвегии Гру Харлем Брундтланд, было сформулировано определение термина «устойчивое развитие»: «модель движения вперед, при которой достигается удовлетворение жизненных потребностей нынешнего поколения людей без лишения будущих поколений такой возможности» [1]. Такая трактовка устойчивого развития является слишком общей и не указывает конкретного пути для практических действий [2]. Можно указать на основную концептуальную сложность, которая заключается в том что, понятие «устойчивое развитие» включает в себя два термина «устойчивость» и «развитие». При этом каждый из этих терминов трактуется не однозначно.

Во-вторых, эти термины разнонаправлены. Действительно, максимизация эффективности обычно увеличивает риски, снижая устойчивость функционирования системы. Наоборот, избыточная устойчивость приводит к росту затрат на ее поддержание, снижая эффективность функционирования системы.

В-третьих, формализация устойчивого развития затрудняется сложностью исследуемых систем и явлений. В настоящее время однозначной, четкой трактовки понятия сложной системы нет. Однако есть характерные признаки, такие как, многомерность, многосвязность, многоконтурность, многоуровневость (иерархичность), составной и многоцелевой характер построения, а также неопределенность и

стохастичность поведения. Ниже приведем определение, которое, на наш взгляд, наиболее адекватно характеризуют понятие сложной системы.

**Определение 1.** Сложной называется система, в модели которой недостаточно информации для эффективного управления этой системой [3].

Это приводит к появлению разных трактовок устойчивого развития применительно к конкретным системам [4–11]. Например, в [12] насчитано более 50 различных интерпретаций понятия «устойчивое развитие».

Реализация устойчивого развития предполагает, что должен осуществляться некий мониторинг исследуемой системы или явления. Под мониторингом понимают систему постоянного наблюдения за течением какого-либо явления для установления его соответствия первоначальным предположениям или желаемому результату. Данное явление может происходить в любой сфере – в общественно-социальных отношениях, в природе, в финансово-экономической сфере и т.д. В рамках мониторинга происходит оценка, контроль системы, формирование управленческих рекомендаций (управление ее состоянием) в зависимости от воздействия определённых факторов.

Поэтому, представляется актуальной проблемой формулирование некоторой формализованной концепции мониторинга устойчивого развития, которая могла быть конкретизируема для конкретных случаев. Одним из возможных путей решения является использование системного подхода [3]. Предпримем попытку формулировки концепции мониторинга устойчивого развития сложных систем на примере территорий.

#### 4.2.2 Постановка задачи

Системный подход предполагает представление системы  $S$  в виде взаимосвязанных элементов (инфраструктур, важнейших показателей и т.д.). Территориальные системы – это сложные эколого-социально-экономические системы, состоящие из огромного числа взаимодействующих элементов. Их характеризует огромное разнообразие и сложность факторов, элементов инфраструктур, связей между ними [13]. К особенностям территориальных систем можно отнести [14]: многомерность; взаимосвязанность компонент; стохастический характер поведения; многокритериальность; разнонаправленность поведения элементов.

С учетом этих особенностей систему  $S$  можно представить в виде случайного вектора  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ . Каждая компонента  $Y_i$  этого вектора является одномерной случайной величиной, характеризующей функционирование соответствующего элемента системы (см. рисунок 4.1).

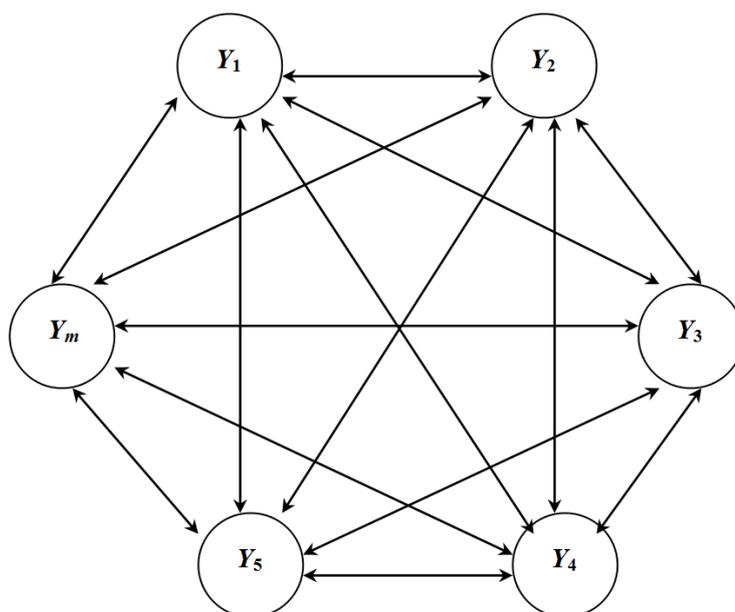


Рисунок 4.1 – Модель системы как модель структуры

Концепция устойчивого развития должна отражать две составляющие: «устойчивость» и «развитие». Поэтому для ее формулирования необходимо решить следующие три задачи:

- 1) выработка интегрального показателя характеризующего эффективное функционирование системы;
- 2) обеспечение устойчивого функционирования системы;
- 3) формирование критерия, характеризующего устойчивое развитие в смысле решения первых двух задач.

#### 4.2.3 Векторная энтропийная модель эффективного функционирования систем

Рассмотрим задачу выработки интегрального показателя характеризующего эффективное функционирование системы.

Многокритериальность функционирования сложных систем, включая территориальные, разнонаправленность функционирования их элементов, затрудняет выработку универсальных формальных показателей, характеризующих эффективность систем в целом.

Известно, что энтропия является фундаментальным свойством любых систем с вероятностным поведением [15]. Понятие энтропии является гибким и допускает

интерпретацию в терминах того раздела науки, где оно применяется. Поэтому энтропийное моделирование является одним из перспективных направлений исследования сложных стохастических систем [16–19].

Однако частое использование энтропии для моделирования открытых систем, в отличие от термодинамики, недостаточно формализовано и носит в основном качественный и частный характер, отсутствуют достаточно простые и адекватные математические модели, позволяющие связать энтропию с фактическими характеристиками состояний многомерных систем. Общим в этих работах является использование информационной энтропии Шеннона [20]. Но, как отмечено в [14], информационная энтропия позволяет разрабатывать адекватные энтропийные модели лишь для частных задач.

Однако в той же работе [20] К. Шеннон эвристически предложил формальный аналог понятия информационной энтропии для  $m$ -мерного непрерывного случайного вектора  $\mathbf{Y}$  с плотностью вероятности  $p_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_m)$

$$H(\mathbf{Y}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, \dots, y_m) \ln p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_m. \quad (4.1)$$

Эта величина впоследствии А.Н. Колмогоровым совместно с И.М. Гельфандом и А.М. Ягломом была названа дифференциальной энтропией [21].

Дифференциальная энтропия, являясь функционалом, заданным на множестве плотностей вероятностей случайного вектора  $\mathbf{Y}$ , представляет собой число. И поэтому не может являться адекватной математической моделью многомерной системы. Однако практическое использование энтропии (4.1) затрудняется необходимостью знать закон распределения многомерной случайной величины  $\mathbf{Y}$ .

В [22] было предложено использовать дифференциальную энтропию (далее, энтропию) для моделирования многомерных стохастических систем. Доказано [22], что энтропию (4.1) можно представить в виде суммы двух компонент:

$$H(\mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y})_V + H(\mathbf{Y})_R, \quad (4.2)$$

$$H(\mathbf{Y})_V = \sum_{i=1}^m H(Y_i) = \sum_{i=1}^m \ln \sigma_{Y_i} + \sum_{i=1}^m \kappa_i \text{ — энтропия хаотичности,}$$

$$H(\mathbf{Y})_R = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^m \ln(1 - R_{Y_k/Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1}}^2) \text{ — энтропия самоорганизации,}$$

где

$\sigma_{Y_i}^2$  – дисперсия,

$\kappa_i = H(Y_i / \sigma_{Y_i})$  – энтропийный показатель типа закона распределения случайной величины  $Y_i$ ,

$R_{Y_k / Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1}}^2$  – индексы детерминации регрессионных зависимостей.

В частности, для многомерной нормально распределенной случайной величины  $\mathbf{Y}$  имеем

$$H(\mathbf{Y})_V = \sum_{i=1}^m \ln \sigma_{Y_i} + m \ln \sqrt{2\pi e}, \quad H(\mathbf{Y})_R = \frac{1}{2} \ln(|\mathbf{R}|), \quad (4.3)$$

где

$\mathbf{R}$  – корреляционная матрица случайного вектора  $\mathbf{Y}$ .

Формула (4.2) не всегда объясняет поведение системы. Сложение компонент  $H(\mathbf{Y})_V$  и  $H(\mathbf{Y})_R$  с точки зрения системного анализа некорректно, т.к. они характеризуют различные закономерности сложных систем:  $H(\mathbf{Y})_V$  – аддитивность, а  $H(\mathbf{Y})_R$  – целостность системы.

Практическое использование соотношения (4.2) показало, что возникают ситуации, когда у систем, имеющих разные функциональные состояния оказываются примерно одинаковыми общие энтропии  $H(\mathbf{Y})$ , но соответствующие значения энтропий хаотичности  $H(\mathbf{Y})_V$  и самоорганизации  $H(\mathbf{Y})_R$  имеют значительные отличия. Это схематично выглядит следующим образом. Имеется две однотипные системы  $\mathbf{Y}^{(1)}$  и  $\mathbf{Y}^{(2)}$  с различными состояниями. При этом  $H(\mathbf{Y}^{(1)}) = 0$ ,  $H(\mathbf{Y}^{(1)})_V = 1$ ,  $H(\mathbf{Y}^{(1)})_R = -1$  и  $H(\mathbf{Y}^{(2)}) = 0$ ,  $H(\mathbf{Y}^{(2)})_V = 10$ ,  $H(\mathbf{Y}^{(2)})_R = -10$ .

Сложные системы, включая территориальные, являются открытыми, их энтропия может, как возрастать, так и уменьшаться. Причем направления изменения энтропий хаотичности  $H(\mathbf{Y})_V$  и самоорганизации  $H(\mathbf{Y})_R$  систем могут быть различными. Для адекватного моделирования и исследования многомерных стохастических систем дифференциальную энтропию следует рассматривать не в скалярной, а векторной форме в виде двух компонент – энтропий хаотичности и самоорганизации как [14]

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}) = (h_V; h_R) = (H(\mathbf{Y})_V; H(\mathbf{Y})_R). \quad (4.4)$$

В конкретных ситуациях направление и величину энтропийного вектора (4.4) следует задавать исходя из особенностей исследуемой системы. Иными словами, у сложных систем должен наблюдаться баланс между энтропиями хаотичности и самоорганизации.

Сложные системы являются открытыми. Влияние энтропии на эволюцию открытых систем исследовалось многими учеными. В их публикациях отмечается, что изменение открытых систем, либо ведет к деградации, либо это процесс самоорганизации, в результате которого появляются более сложные структуры. Пригожин И.Р. [23] в 1955 г. сформулировал расширенный вариант второго начала термодинамики, согласно которому полное изменение энтропии  $dS$  открытой системы нужно представлять в виде двух частей: причиной первой из них служат внутренние процессы, которые необратимы и непременно сопровождаются переходом части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т.п.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счете – в теплоту; вторая часть обусловлена обменом энергией и веществом между системой и окружающей средой

$$dS = dS_{in} + dS_{out}, \quad (4.5)$$

где

$dS$  – полное изменение энтропии открытой системы,

$dS_{in}$  – изменение энтропии в ходе процессов, происходящих в системе,

$dS_{out}$  – изменение энтропии в ходе процессов обмена со средой.

Однако вопрос практического применения этой теории для исследования реальных систем не был раскрыт. Выразим изменение общей энтропии  $\Delta H(\mathbf{Y})$  через изменения энтропий хаотичности и самоорганизации:

$$\Delta H(\mathbf{Y}) = \Delta H(\mathbf{Y})_V + \Delta H(\mathbf{Y})_R. \quad (4.6)$$

Попробуем дать трактовку формулы (4.5) согласно (4.6). Во-первых, очевидно, что  $dS \cong \Delta H(\mathbf{Y})$ . Знак условного равенства « $\cong$ » используем в виду того, что в [23] рассматривалось изменение термодинамической энтропии  $dS$ .

Рассмотрим влияние на энтропию процесса обмена со средой. От среды многомерная открытая система берет или отдает энергию, что можно что можно

трактовать как изменение средних квадратических отклонений  $\sigma_{Y_i}$ . Кроме этого появление новых свойств, состояний также может возникнуть извне, от среды. Поэтому изменение вида распределения, а значит и энтропийных показателей  $\kappa_i$  также обусловлено процессом обмена системы со средой, т.е. можно считать, что изменение энтропии в ходе процессов обмена со средой представляет собой изменение энтропии хаотичности

$$dS_{out} \cong \Delta H(\mathbf{Y})_V. \quad (4.7)$$

Элементы системы в процессе функционирования могут усиливать или ослаблять взаимодействие между собой за счет увеличения или уменьшения тесноты корреляционной связи. Следовательно, изменение энтропии в ходе процессов, происходящих в системе – это изменение энтропии самоорганизации

$$dS_{in} \cong \Delta H(\mathbf{Y})_R. \quad (4.8)$$

На основе (4.7) и (4.8) можно выдвинуть следующую гипотезу.

**Гипотеза.** Полное изменение энтропии открытой системы состоит из суммы двух слагаемых. Первое слагаемое характеризует влияние взаимодействия системы с внешней средой и представляет собой изменение энтропии хаотичности. Второе слагаемое характеризует процессы, происходящие внутри системы, и представляет собой изменение энтропии самоорганизации.

**Пример 1.** Энтропийный анализ динамики развития Екатеринбурга (областной центр Свердловской области) в 1992–2017 гг.

Эффективное функционирование мегаполиса как сложной системы согласно векторной энтропийной модели (4.4) состоит в одновременном росте разнообразия, возможностей для всех элементов этой системы и наличию тесной взаимосвязи между этими элементами. Это проявляется в том, что с развитием мегаполиса его энтропия хаотичности должна постепенно увеличиваться, а энтропия самоорганизации – уменьшаться.

Анализ проведем по данным статистической отчетности Росстата. Из множества основных социально-экономических показателей городов сформируем систему признаков, характеризующих все основные стороны инфраструктуры города [14]: 1) Естественный прирост, убыль (-) на 1000 человек населения; 2) Доля работающего населения в

организациях, %; 3) Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата (в ценах 2017 г.), тыс. руб.; 4) Доля пенсионеров, состоящих на учете в органах социальной защиты населения, %; 5) Общая площадь жилых помещений, приходящаяся на одного городского жителя (на конец года), м<sup>2</sup>; 6) Численность воспитанников в дошкольных образовательных организациях, тыс. чел.; 7) Численность врачей на 1000 населения, чел.; 8) Число зарегистрированных преступлений на тыс. чел.; 9) Объем работ, выполненных по договорам строительного подряда (в ценах 2017 г.), тыс. руб. на 1 чел.; 10) Оборот розничной торговли (в ценах 2017 г.), тыс. руб. на 1 чел.; 11) Инвестиции в основной капитал (в ценах 2017 г.), тыс. руб. на 1 чел.

При расчете энтропии оценки выполнялись по периодам в 13 лет. Этот период оказался оптимальным в смысле статистического сглаживания, с одной стороны, и учета динамики изменения энтропии, с другой. Энтропия оценивалась в векторной форме (4.4). Учет инфляции был проведен путем пересчета в цены 2017 г. на основе индексов потребительских цен, разная численность населения городов была учтена переходом к относительным показателям на одного жителя. Поскольку выборка оказалась достаточно малой, то отклонения эмпирических распределений рассматриваемых признаков от нормального распределения практически нельзя установить. Поэтому при вычислении энтропий хаотичности и самоорганизации воспользуемся формулами (4.3).

На рисунке 4.2 приведены графики изменения энтропий хаотичности и самоорганизации в Екатеринбурге. На рисунке 4.3 показана динамика энтропии.

Анализ графиков на рисунках 4.2, 4.3 позволяет сделать следующие выводы.

- 1) Период стабилизации функционирования (до 2008 г.). Энтропия хаотичности  $h_V$  возрастает, а энтропия самоорганизации  $h_R$  уменьшается.
- 2) Мировой финансовый кризис 2008–2009 гг. Кратковременное резкое изменение направления векторной энтропии на противоположное.
- 3) Период восстановления экономики после финансового кризиса (2009–2011 гг.) с последующим снижением темпов роста валового внутреннего продукта (2012–2013 гг.). Направление векторной энтропии постепенно меняется (вначале  $h_V$  возрастает, а  $h_R$  уменьшается, но постепенно эта тенденция затухает).
- 4) Объявление санкций (2014 г.). Резкое увеличение  $h_R$ .

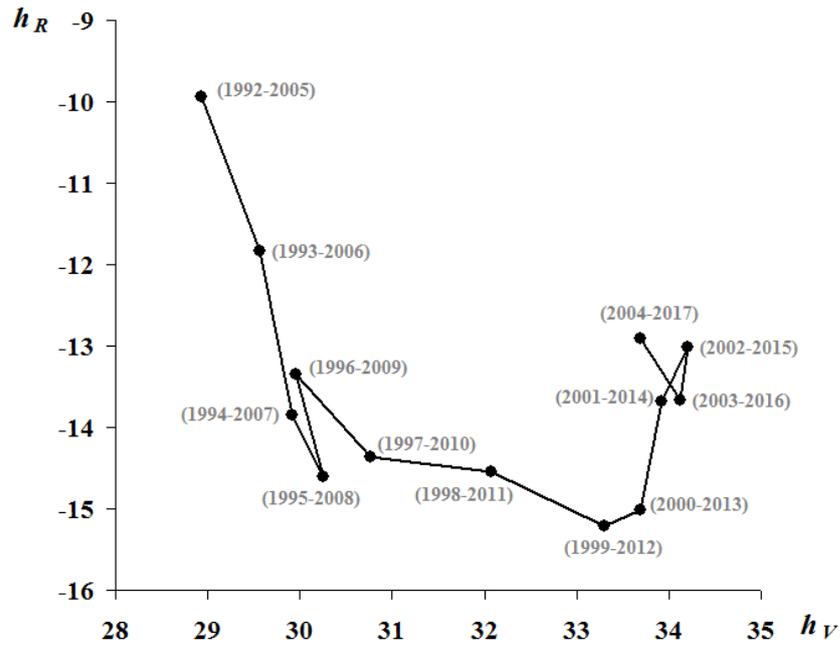


Рисунок 4.2 – Изменение энтропий хаотичности и самоорганизации в Екатеринбурге

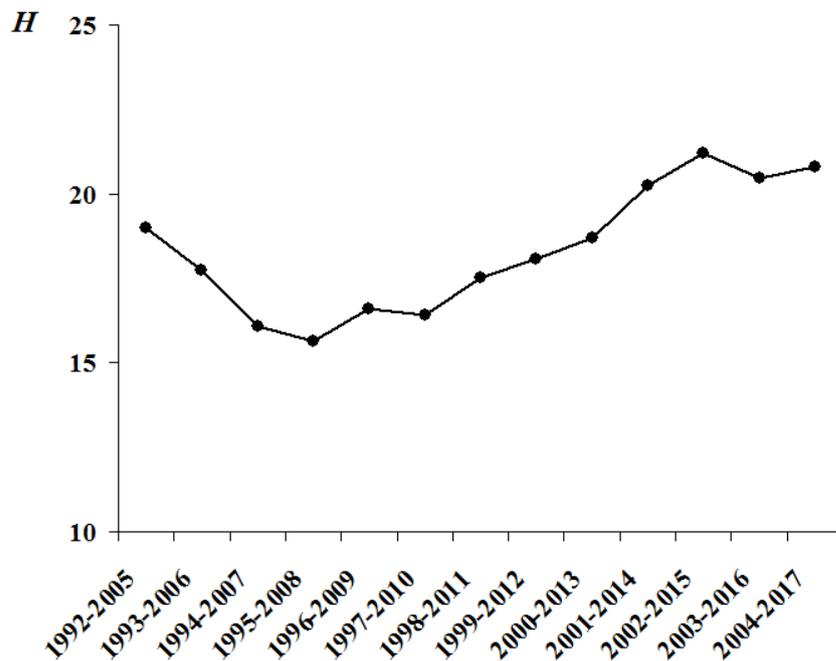


Рисунок 4.3 – Динамика энтропии в Екатеринбурге

- 5) Функционирование в условиях санкций (с 2014 г.). Наблюдается практически отсутствие динамики векторной энтропии, причем величина энтропия самоорганизации  $h_R$  зафиксировалась на уровне 2006–2007 гг., а энтропия хаотичности  $h_V$  – на уровне 2013 г.

б) Общая энтропия  $H(\mathbf{Y})$  в рассматриваемом периоде изменилась незначительно.

**Пример 2.** Модель системы, характеризующей безопасность производства.

Были исследованы 17 угледобывающих предприятий [22]. На основе двух обобщенных факторов ( $Y_1$  – фактор, характеризующий организацию безопасного производства;  $Y_2$  – фактор, отражающий профессионализм персонала) все предприятия были разделены на две группы: 1) предприятия с низким уровнем травматизма; 2) предприятия с высоким уровнем травматизма. Для первой и второй групп шахт соответственно имеем:

$$\left(h_V^{(1)}; h_R^{(1)}\right) = (2,42; -0,31), \quad H\left(\mathbf{Y}^{(1)}\right) = 2,11,$$

$$\left(h_V^{(2)}; h_R^{(2)}\right) = (3,74; -0,70), \quad H\left(\mathbf{Y}^{(2)}\right) = 3,04.$$

В этом случае направление вектора изменения энтропии будет отличаться от примера 1: у предприятий с высоким уровнем травматизма энтропию хаотичности нужно снижать, а энтропию самоорганизации – увеличивать.

Например, это можно сделать так: чтобы приблизить состояние второй группы шахт к состоянию первой группы необходимо уменьшить разброс фактора, характеризующего организацию безопасного производства, и уменьшить взаимосвязь с фактором, отражающим профессионализм персонала. Это означает более конкретную и четкую организацию производства. Организация безопасного производства не должна сильно зависеть от степени профессионализма и компетентности персонала.

**Пример 3.** Исследуем возможности энтропийного моделирования на примере анализа популяции в плане профилактики хронических неинфекционных заболеваний (ХНИЗ) по биологическим факторам риска [22]. Для проведения анализа изменения популяционной энтропии в зависимости от статуса здоровья были сформированы две равные по диапазонам возрастные группы: 18–26 лет, 27–35 лет. Были выделены 4 фактора риска: «Уровень общего холестерина», «Систолическое артериальное давление», «Индекс массы тела», «Уровень глюкозы». Результаты анализа приведены в таблице 4.1.

По мере ухудшения состояния здоровья популяции происходит увеличение общей популяционной энтропии и энтропии хаотичности. Это можно объяснить тем, что к патологическому влиянию факторов риска на человеческий организм в отдельности и на всю популяцию в целом добавляется дополнительное повреждающее воздействие самих ХНИЗ.

Таблица 4.1 – Уровни энтропии в разных группах людей

Возраст, лет	Статус здоровья	Энтропия хаотичности $H(\mathbf{Y})_V$	Энтропия самоорганизации $H(\mathbf{Y})_R$	Энтропия общая $H(\mathbf{Y})$
18–26	Здоровые	5,500	-0,514	4,986
	Практически здоровые	7,131	-0,578	6,553
	Больные	7,847	-0,696	7,151
27–35	Здоровые	5,731	-0,299	5,432
	Практически здоровые	8,376	-0,542	7,834
	Больные	8,720	-0,781	7,939

Энтропия самоорганизации, наоборот, по мере ухудшения состояния здоровья популяции уменьшается, что соответствует усилению тесноты взаимосвязей между подсистемами. Это можно объяснить тем, что развитие заболеваний в организме происходит во многом взаимосвязано. С другой стороны, при развитии заболеваний какие-то подсистемы могут подстраиваться под другие, компенсируя недостатки их функционирования (эффект замещения).

#### 4.2.4 Модель многомерного риска сложных систем

Рассмотрим задачу обеспечения устойчивого функционирования системы. Здесь вначале нужно конкретизировать понятие «устойчивость». Наиболее часто устойчивости функционирования системы интерпретируют с точки зрения ее безопасности. Вопросы безопасности решаются с помощью риск-анализа [24]. Ряд авторов отмечают, что темпы роста ущерба значительно превосходят темпы роста экономики [25, 26]. Это можно объяснить постоянным возрастанием риска в условиях научно-технической революции и форсированного развития техносферы [27]. Поэтому будем считать, что устойчивость функционирования территориальной системы неразрывно связана с риском, чем ниже уровень риска, тем устойчивее состояние системы. Таким образом, диагностирование устойчивости системы можно осуществлять на основе мониторинга ее риска. Для этого необходимы адекватные модели риска.

Пусть  $S$  – некоторая многомерная стохастическая система. Будем считать адекватным представлением этой системы в виде случайного вектора  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_l)$  с некоторой плотностью вероятности  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Развитие сложной системы, повышение эффективности ее функционирования является неизбежной причиной роста рисков.

Поэтому необходимо оценивать риски таких систем. Рассмотрим модель риска многомерных стохастических систем [28].

Вместо общепринятого выделения конкретных опасных состояний будем задавать геометрическую область  $D$  неблагоприятных исходов. Формально эта область может выглядеть произвольным образом в зависимости от конкретной задачи.

Наиболее распространена концепция опасных состояний как больших и маловероятных отклонений выборочных значений от некоторого наилучшего положения  $\Theta$ . В этом случае  $D$  представляет собой внешнюю область  $m$ -осного эллипсоида

$$D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l) : \sum_{j=1}^l \frac{(x_j - \theta_j)^2}{b_j^2} \geq 1 \right\}.$$

Задав функцию последствий от опасных ситуаций (функцию риска) в виде  $g(\mathbf{x})$ , получим модель для количественной оценки риска [29]

$$r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_D g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.9)$$

Если в (4.9) принять  $g(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in D$  и  $g(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \notin D$ , то  $r(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} \in D)$ , т.е. риск равен вероятности неблагоприятного исхода.

На ранней стадии исследования системы сложно достаточно точно описать функцию  $g(\mathbf{x})$ , поэтому формула (4.2) становится оценкой  $P(D)$  и является удобным начальным приближением модели риска.

Для задания функции  $g(\mathbf{x})$  требуется количественная оценка последствий для исследуемой системы в зависимости от значений факторов риска. Это требует проведения отдельного исследования. Отметим, что значения функции  $g(\mathbf{x})$  задаются в условных единицах. Но они, как правило, достаточно просто интерпретируются в соответствующей предметной области. Суть функции  $g(\mathbf{x})$  в следующем. Она принимает наименьшее неотрицательное (например, нулевое) значение в точке  $\Theta$  или в ее окрестности  $U(\Theta)$ . Далее по каждому направлению при удалении от  $U(\Theta)$  должна монотонно возрастать. Для масштабирования по каждому фактору риска зададим некоторые предельные значения, при достижении которых последствия становятся опасными (или необратимыми). Зададим значения  $g(\mathbf{x})$  в каждой такой точке равными некоторой величине, например 1.

Для удобства желательно на функцию  $g(\mathbf{x})$  наложить ряд ограничений: выпуклость, непрерывность и т.д.

В [29] приведен вариант задания функции  $g(\mathbf{x})$  в виде параболоида. В качестве иллюстрации на рисунке 4.4 показан пример функции риска для случая  $m = 2$ . Черным цветом показан эллипс, описывающий область  $\bar{D}$  допустимых значений факторов риска и лежащий на плоскости  $Ox_1x_2$  ( $r = 0$ ). Параболоид над плоскостью представляет собой возможные значения риска  $r(\mathbf{X})$ . Белые точки на плоскости – это значения факторов риска, им же соответствуют точки на поверхности параболоида, которые задают значения риска, образ границы эллипса  $\bar{D}$  показан в виде черной линии. Все соответствующие пары точек (факторы риска и значения риска) связаны между собой вертикальными пунктирными линиями.

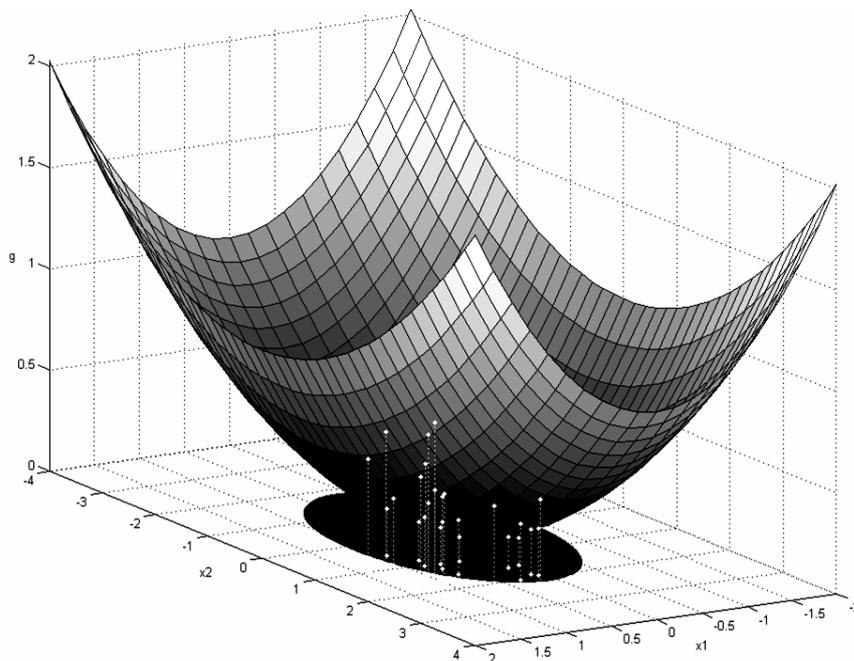


Рисунок 4.4 – Пример двумерной функции риска

В задачах мониторинга риска, наряду с оценкой риска  $r(\mathbf{X})$  по всем факторам риска  $X_1, X_2, \dots, X_l$  многомерной системы, целесообразно оценить вклад каждого фактора в суммарный риск. Введем случайный вектор  $\mathbf{X}_k^- = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_l)$ . Тогда абсолютное изменение риска многомерной системы за счет добавления фактора  $X_k$  равно

$$\Delta r(X_k) = r(\mathbf{X}) - r(\mathbf{X}_k^-). \quad (4.10)$$

Разделив  $\Delta r(X_k)$  на риск  $r(\mathbf{X}_k^-)$ , получим относительное изменение риска многомерной системы за счет добавления фактора  $X_k$

$$\delta r(X_k) = \Delta r(X_k) / r(\mathbf{X}_k^-) \quad (4.11)$$

Отметим, что наряду с вкладом в общий риск одного фактора формулы (4.10), (4.11) позволяют оценивать влияние и группы факторов.

Мониторинг риска на основе заключается в последовательном оценивании во времени фактических значений величин  $r(\mathbf{X})$ ,  $\Delta r(X_k)$ ,  $\delta r(X_k)$ ,  $j=1, 2, \dots, l$ , а также динамики их изменения.

Рассмотрим далее наиболее распространенный частный случай, когда  $\mathbf{X}$  имеет совместное нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\},$$

где

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_l)^T$  – вектор математических ожиданий,

$\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{l \times l}$  – ковариационная матрица,

$\sigma_{ii} = \sigma_i^2$  – дисперсия фактора  $X_i$ .

Использование гауссовского случайного вектора опирается на центральную предельную теорему [30]. Как показала апробация на ряде примеров, такая идеализация не столь критична, и если есть какие-либо основания считать, что плотности вероятностей компонент вектора  $\mathbf{X}$  имеют более вытянутые хвосты, то это можно скорректировать за счет соответствующего задания функции  $g(\mathbf{x})$ .

**Пример 4.** Рассмотрим двумерный гауссовский случайный вектор  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ , компоненты которого имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. На рисунке 4.5 показан пример реализаций такого случайного вектора для: а)  $\rho = 0,4$ ; б)  $\rho = 0,9$ ,  $\rho$  – коэффициент корреляции между  $X_1$  и  $X_2$ .

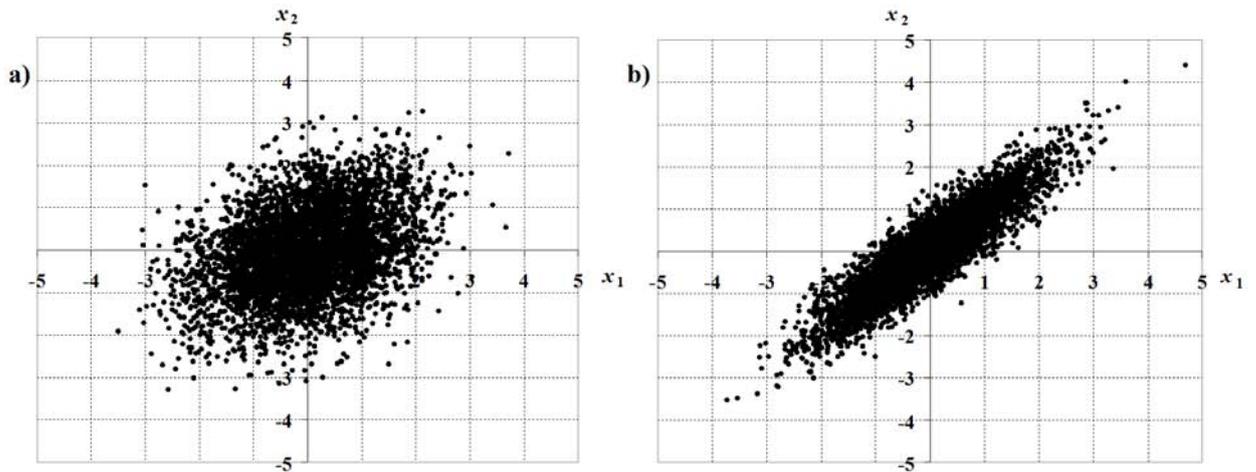


Рисунок 4.5 – Реализации стандартного нормального случайного вектора

Из рисунка 4.5 видим, что с увеличением тесноты корреляционной связи растет вероятность больших отклонений случайного вектора от начала координат.

**Пример 5.** Оценим вероятность  $P(D)$  для гауссовского случайного вектора  $\mathbf{X}$ , с разной теснотой корреляционной связи  $D_e(\mathbf{X}) = 1 - |\mathbf{R}_X|^{1/m}$  [31], где  $|\mathbf{R}_X|$  – определитель корреляционной матрицы ( $D_e(\mathbf{X}) = 0$  – независимость компонент,  $D_e(\mathbf{X}) = 1$  – строгая линейная зависимость). Рассмотрим случаи:  $D_e(\mathbf{X}) = 0$ ,  $D_e(\mathbf{X}) = 0,5$ ,  $D_e(\mathbf{X}) = 1$ . Результаты расчета  $P(D)$  приведены на рисунке 4.6. Для наглядности примем  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ ,  $A_j = b_j / \sigma_j$ .

Анализ графиков на рисунке 4.6 говорит о следующем.

На рост вероятности неблагоприятного исхода влияет как увеличение размерности  $m$ , так и увеличение тесноты корреляционной связи между компонентами случайного вектора  $\mathbf{X}$  приводит к резкому росту. Отметим, что даже средняя теснота корреляционной связи ( $D_e(\mathbf{X}) = 0,5$ ) приводит к значительному росту вероятности неблагоприятного исхода. Эффект усиливается с увеличением значений  $A_j$ , что соответствует менее вероятным, но более опасным неблагоприятным исходам. Поэтому при моделировании риска нужно учитывать как фактор многомерности, так и тесноту корреляционных связей.

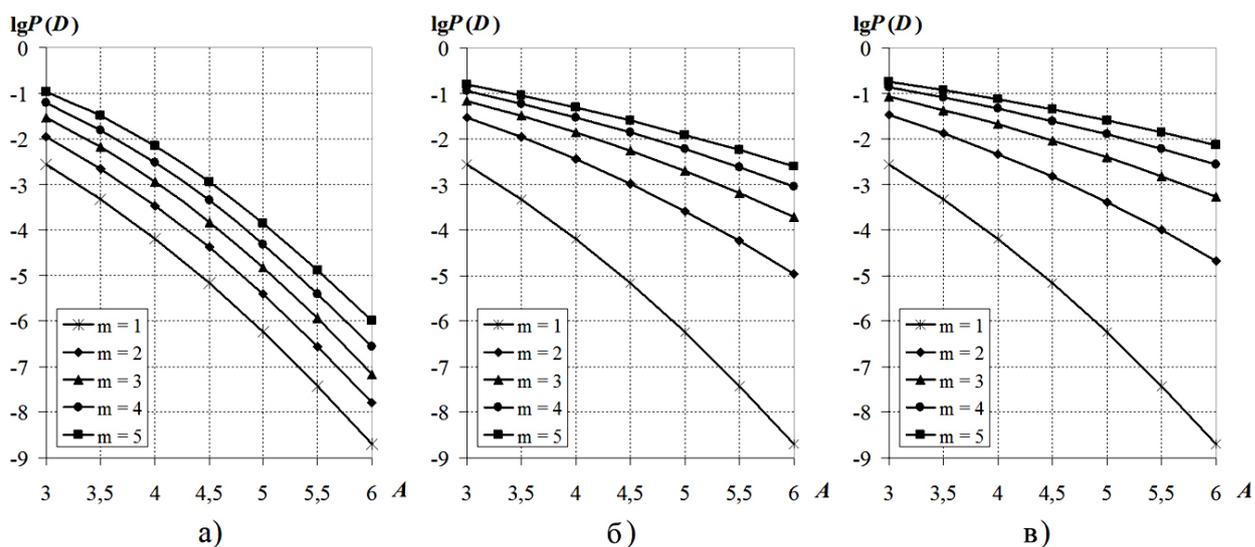


Рисунок 4.6 – Зависимости  $\lg P(D)$  от порогового уровня  $A$ : а)  $D_e(\mathbf{X}) = 0$ ; б)  $D_e(\mathbf{X}) = 0,5$ ; в)  $D_e(\mathbf{X}) = 1$ . Обозначения: ряд 1 ( $m = 1$ ), ряд 2 ( $m = 2$ ), ряд 3 ( $m = 3$ ), ряд 4 ( $m = 4$ ), ряд 5 ( $m = 5$ )

**Пример 6.** Апробация модели риска многомерной стохастической системы для мониторинга риска Свердловской области в 1999–2017 гг.

Выполним мониторинг Свердловской области по динамике макроэкономических факторов риска, взяв в качестве интервала 9 лет. В таблице 4.2 приведены факторы риска и их пороговые уровни.

Таблица 4.2 – Макроэкономические факторы риска регионов

Факторы риска	Пороговые уровни $K_j$
$X_1$ – динамика реальных доходов населения, в % к предыдущему году	79,93
$X_2$ – отношение среднего размера пенсии к прожиточному минимуму пенсионеров	0,66
$X_3$ – заболеваемость на 1000 чел. населения	960
$X_4$ – смертность от внешних причин, число умерших на 100000 чел. населения	322,1
$X_5$ – износ основных фондов на конец года, %	71,33
$X_6$ – объем доходов бюджета на душу населения, в ценах 2017 г., тыс. руб.	21,75
$X_7$ – индекс физического объема валового регионального продукта, % к предыдущему году	88,4
$X_8$ – уровень безработицы, в %	18

Считаем, что случайный вектор  $\mathbf{X}$  имеет совместное нормальное распределение.

На рисунках 4.7, 4.8 показаны результаты расчета вероятностей неблагоприятного исхода  $P(D)$  и риска  $r(\mathbf{X})$  для пороговых уровней факторов риска  $\mathbf{K}$ .

Анализ результатов мониторинга многомерного риска в Свердловской области показал следующее.

- 1) В начальный период наблюдались наибольшая социально-экономическая неустойчивость (наибольшие значения риска). Затем в динамике постепенно устойчивость региона повышалась (риски уменьшались).
- 2) После введения санкций риск стал увеличиваться. Меньшая скорость роста  $r(\mathbf{X})$  по сравнению с  $P(D)$  свидетельствует о том, что вероятность возникновения очень опасных ситуаций растет с 2014 г. незначительно.
- 3) В Свердловской области до 2010 г. основной вклад в региональную неустойчивость вносил фактор  $X_6$ , затем таким фактором стал  $X_2$ , а с 2015 г. основной вклад в неустойчивость стал вносить фактор  $X_7$ .

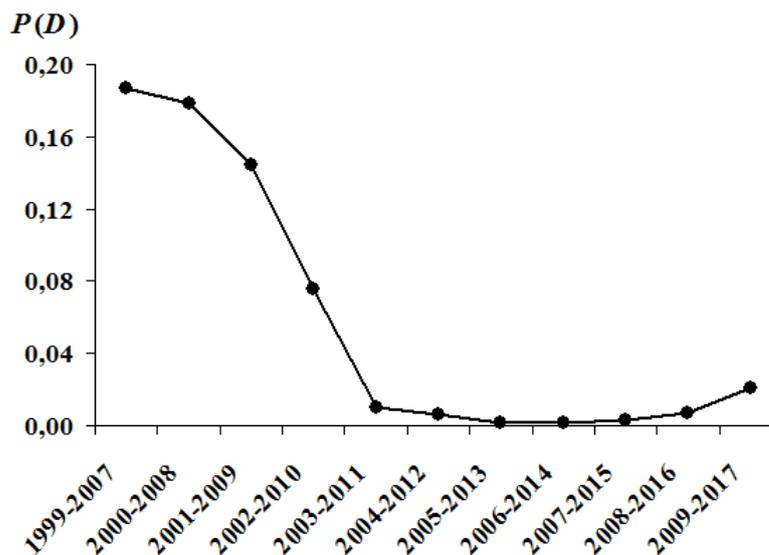


Рисунок 4.7 – Оценки  $P(D)$  в Свердловской области

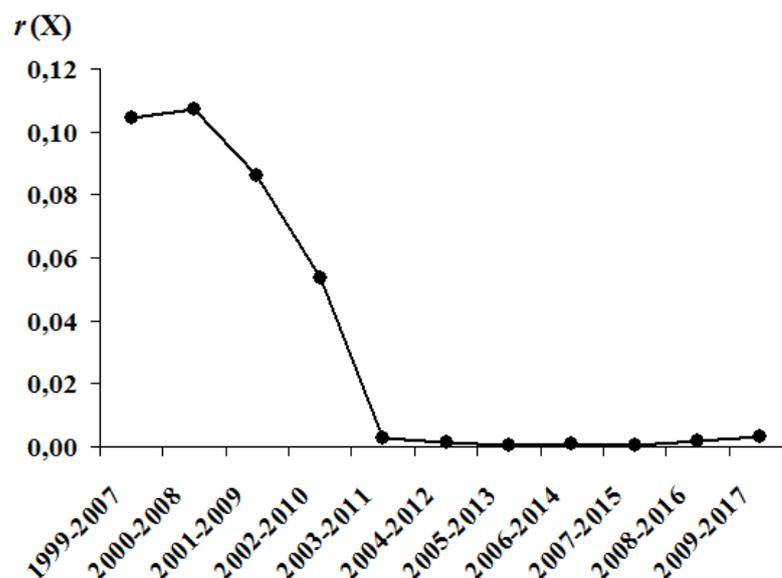


Рисунок 4.8 – Оценки  $r(\mathbf{X})$  в Свердловской области

#### 4.2.5 Формирование концепции устойчивого развития

Рассмотренные примеры показывают, что «развитие» и «устойчивость» характеризуют различные стороны функционирования сложных систем. И для обеспечения устойчивого развития их нужно учитывать совместно.

**Определение 2.** Под устойчивым развитием сложной системы будем понимать динамику, состоящую в наличии тенденции сбалансированного изменения векторной энтропии при сохранении приемлемого уровня рисков.

Для этого объединим векторную энтропийную модель и модель рисков многомерной стохастической системы. При этом в качестве элементов системы (компоненты случайного вектора  $\mathbf{Z}$ ) следует рассматривать как факторы риска  $X_i$ , так и показатели  $Y_j$ , характеризующие функционирование системы, т.е.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \max(l, m) \leq n \leq l + m.$$

Случай  $n < l + m$  возникает, когда  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \emptyset$ .

В рамках предложенной концепции, наряду с рассмотренными выше задачами мониторинга сложных систем, можно решать и задачи управления (выработки управленческих рекомендаций).

Векторное энтропийное управление заключается в переводе вектора  $\mathbf{h}(\mathbf{Z})$  из состояния  $\mathbf{h}(\mathbf{Z}^0) = (h_V^0; h_R^0)$  в состояние  $\mathbf{h}(\mathbf{Z}^*) = (h_V^*; h_R^*)$ , соответствующее эффективному функционированию стохастической системы.

Для гауссовской системы векторное энтропийное управление состоит в том, чтобы направить энтропию из некоторой начальной точки  $(h_V^0; h_R^0) = (H(\mathbf{Z}^0)_V; H(\mathbf{Z}^0)_R)$  с ковариационной матрицей  $\Sigma_0$  в конечную точку  $(h_V^*; h_R^*)$  при минимальном изменении ковариационной матрицы  $\Sigma^0 = \{\sigma_{ij}^0\}$  и вектора средних  $\mathbf{a}^0$  и приемлемом риске (см. рисунок 4.9).

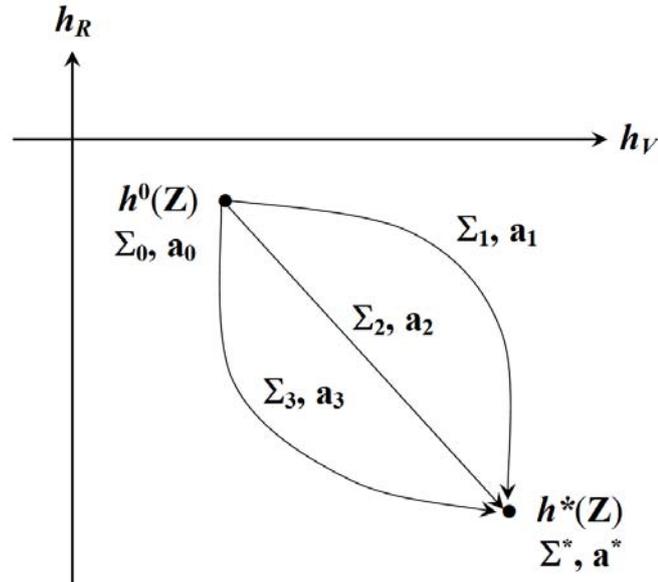


Рисунок 4.9 – Иллюстрация векторного энтропийного управления для обеспечения устойчивого развития системы

Задача векторного энтропийного управления гауссовской системой для обеспечения устойчивого развития примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)^2 + \sum_{i=1}^l (a_i - a_i^0)^2 \rightarrow \min_{\mathbf{a}, \Sigma}, \\ H(\mathbf{Y})_V = A, \\ H(\mathbf{Y})_R = B, \\ r(\mathbf{X}) \leq r^*, \\ \Sigma \in G_\Sigma, \mathbf{a} \in H_a, \\ \sigma_{ij}^2 < \sigma_{ii} \sigma_{jj}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{ii} > 0 \forall 1 \leq i, j \leq n, \\ \Sigma > 0, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

где

$$A = h_V^*,$$

$$B = h_R^*,$$

$\mathbf{a}$  – вектор средних значений компонент  $X_i, i = 1, 2, \dots, l$ .

Последнее ограничение в (4.12) означает положительную определенность матрицы  $\Sigma$ . Отметим, что критерий эффективности в (4.12) может быть и иным, в зависимости от особенностей конкретной системы  $S$ .

#### 4.2.6 Выводы

Таким образом, на основе использования двух оригинальных моделей – векторной энтропии и многомерного риска удалось формализовать новую концепцию устойчивого развития сложных систем. Обе модели успешно апробированы на реальных данных.

Данная концепция может быть реализована посредством мониторинга исследуемой системы. В качестве наблюдаемых параметров используются показатели эффективности функционирования системы и ее факторы риска. Направление развития задается энтропийным вектором, а устойчивость обеспечивается за счет приемлемого уровня риска.

Управленческие рекомендации формируются в виде решения экстремальной задачи (4.12). Данная задача решается методами штрафных функций. В настоящее время работа находится на стадии практической апробации мониторинга устойчивого развития Свердловской области.

Можно сделать следующие выводы:

- 1) Сформулирована вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития сложных стохастических систем. Она основана на моделях векторной энтропии и многомерного риска.
- 2) Согласно сформулированной концепции под устойчивым развитием сложной системы будем понимать динамику, состоящую в наличии тенденции сбалансированного изменения векторной энтропии при сохранении приемлемого уровня рисков.
- 3) Предложенная концепция устойчивого развития апробирована применительно к территориальным системам.

### **4.3 Энтропийное моделирование дискретных случайных векторов на примере группировок и балльных показателей**

Энтропийное моделирование широко используется при исследовании открытых стохастических систем в различных областях. Однако при использовании дифференциальной энтропии для моделирования стохастических систем все компоненты случайного вектора должны быть непрерывными случайными величинами. На практике исследуемые явления обычно являются непрерывными, и дискретность возникает при группировании данных или при переходе к балльным показателям. Ниже описана методика энтропийного моделирования многомерных стохастических систем на примере группировок и балльных показателей [32]. Показано, что дифференциальная энтропия не может использоваться при моделировании дискретных случайных величин. Однако для случаев, когда дискретные случайные величины получаются в результате группирования данных или переходу к балльным показателям, возможно использование дифференциальной энтропии. Это достигается за счет перехода от дискретных случайных величин к их аппроксимациям непрерывными случайными величинами, имеющими кусочно-линейные функции распределения. Рассмотрены два случая. Во-первых, когда дискретность возникает при группировках исходных непрерывных величин. Во-вторых, при переходе к балльным показателям. Приведен пример расчета дифференциальной энтропии дискретной компоненты, полученный в результате группировки нормально распределенной случайной величины.

#### **4.3.1 Введение**

Энтропия – это одно из фундаментальных свойств стохастических систем. В настоящее время достаточно распространено использование энтропии для описания поведения открытых стохастических систем в различных областях [33–36]. Общим в этих работах является использование введенной К. Шенноном информационной энтропии [20].

Однако применение информационной энтропии в качестве модели многомерных стохастических систем сталкивается с затруднениями – необходимо оценивать вероятности всех возможных состояний системы (это требует больших объемов выборок, кроме того некоторые состояния заранее могут быть неизвестны), а также затруднено моделирование взаимосвязей между элементами многомерных систем.

Данным недостатком лишена модель, использующая дифференциальную энтропию [22]. Она основана на представлении системы в виде случайного вектора и разложении его

дифференциальной энтропии на компоненты – энтропии хаотичности и самоорганизации. Однако все компоненты вектора должны быть непрерывными случайными величинами. Это существенно сужает область применения энтропийного моделирования, поскольку во многих приложениях, например, в медицине, экономике, часто вместо фактических значений признаков используют их сгруппированные величины или вводят их балльные (рейтинговые) оценки [37–39].

В [40] описан частный случай энтропийного моделирования, когда несколько компонент были дискретными случайными величинами. Однако выбор вида закона распределения непрерывной случайной величины, аппроксимирующей дискретную компоненту, недостаточно обоснован. Также не приведено исследование точности энтропийного моделирования при наличии балльных компонент, а также не были учтены особенности смешанного (непрерывного и дискретного) состава компонент случайного вектора.

Опишем методику энтропийного моделирования многомерных стохастических систем, все или часть компонент которых являются балльными показателями или получены с помощью группировки, и ее апробация на модельных данных [32].

#### 4.3.2 Материал и методы исследования

Представим многомерную стохастическую систему в виде случайного вектора  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ . Его дифференциальная энтропия равна

$$H(\mathbf{Y}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{Y}}(x_1, x_2, \dots, x_m) \ln p_{\mathbf{Y}}(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (4.13)$$

где

$p_{\mathbf{Y}}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  – плотность распределения случайного вектора  $\mathbf{Y}$ .

Предлагаемый подход основан на модели многомерной стохастической системы в виде случайного вектора  $\mathbf{Y}$  с взаимно зависимыми компонентами, являющимися непрерывными случайными величинами и использует дифференциальную энтропию:  $S \rightarrow S(\mathbf{Y}) \rightarrow H(\mathbf{Y})$ .

Каждая компонента  $Y_i$  вектора  $\mathbf{Y}$  является одномерной случайной величиной, характеризующей функционирование соответствующего элемента системы.

В [22] доказано, что если все компоненты  $Y_i$  имеют дисперсии  $\sigma_{Y_i}^2$ , то дифференциальная энтропия  $H(\mathbf{Y})$  случайного вектора  $\mathbf{Y}$  равна

$$H(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m \ln \sigma_{Y_i} + \sum_{i=1}^m \kappa_i + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^m \ln(1 - R_{Y_k/Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1}}^2), \quad (4.14)$$

где

$$\kappa_i = H(Y_i / \sigma_{Y_i}) = H(\widehat{Y}_i) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\widehat{Y}_i}(x) \ln p_{\widehat{Y}_i}(x) dx \quad - \text{энтропийный показатель типа}$$

закона распределения случайной величины  $Y_i$ ,

$R_{Y_k/Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1}}^2$  – индексы детерминации регрессионных зависимостей.

Первые два слагаемых  $H(\mathbf{Y})_V = \sum_{i=1}^m \ln \sigma_{Y_i} + \sum_{i=1}^m \kappa_i$  названы энтропией хаотичности, а

третье –  $H(\mathbf{Y})_R = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^m \ln(1 - R_{Y_k/Y_1 Y_2 \dots Y_{k-1}}^2)$  – энтропией самоорганизации.

Проблема состоит в том, что все компоненты  $Y_i$  в (4.13) должны быть непрерывными случайными величинами, что не позволит определить энтропийные показатели типа их законов распределения. Покажем это. Рассмотрим некоторую дискретную случайную величину  $Z$ , имеющую ряд распределения, представленный в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Ряд распределения случайной величины  $Z$

$Z$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	...	$z_{n-1}$	$z_n$
$p_k = P(Z = z_k)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_{n-1}$	$p_n$

Запишем функцию распределения  $F_Z(x)$  случайной величины  $Z$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq z_1, \\ \sum_{i=1}^k p_i, & z_k < x \leq z_{k+1}, k = 1, \dots, n-1, \\ 1, & x > z_n. \end{cases}$$

Очевидно, что плотность вероятности  $p_Z(x)$  случайной величины  $Z$  всюду, кроме точек  $z_k$ , равна нулю, а в точках  $z_k$  не существует, т.е.

$$p_Z(x) = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_k}{\Delta x}, & x = z_k, k = 1, \dots, n, \\ 0, & x \neq z_k. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальную энтропию дискретной случайной величины  $Z$

$$\begin{aligned} H(Z) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x) \ln p_Z(x) dx = - \sum_{k=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (p_Z(z_k) \ln p_Z(z_k) \Delta x) = \\ &= - \sum_{k=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{P_k}{\Delta x} \ln \frac{P_k}{\Delta x} \Delta x \right) = - \sum_{k=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( p_k \ln \frac{P_k}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $\forall k \ 0 < p_k < 1$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\Delta x} = +\infty$ , то предел в каждом слагаемом расходится и стремится к  $+\infty$ . Поэтому дифференциальная энтропия дискретной случайной величины  $Z$  не существует ( $H(Z) \rightarrow -\infty$ ).

Таким образом, при использовании энтропийной модели (4.13)–(4.14) все компоненты случайного вектора  $\mathbf{Y}$  должны быть непрерывными случайными величинами. Если некоторая компонента  $Y_i$  является дискретной случайной величиной, то ее необходимо заменить на непрерывную. В общем виде это делать нельзя, т.к. в зависимости от вида непрерывной функции распределения  $F_{\tilde{Z}}(x)$ , аппроксимирующей функцию  $F_Z(x)$ , можно получить практически любое значение энтропии  $H(\tilde{Z})$ , от некоторой константы до любой сколь угодно большой отрицательной величины (с ростом точности аппроксимации). Таким образом, энтропия (4.13) может использоваться для дискретных случайных величин только, если они получены из непрерывных путем преобразований (группировки, переход к балльным величинам и т.д.). В этом случае для определения необходимо восстановить исходную функцию распределения непрерывной случайной величины  $Z^0$ , которую заменили на дискретную случайную величину  $Z$ . Восстановить истинную функцию  $F_{Z^0}(x)$  невозможно.

Поэтому ограничимся приближенным вариантом применительно к распространенным ситуациям, когда от  $Z^0$  к  $Z$  переходят с помощью группировки данных и балльных показателей.

### 4.3.3 Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим оба этих случая.

**Случай 1. Группировки данных.** Пусть ряд распределения дискретной случайной величины  $Z$ , представленный в таблице 4.4, получен путем группировки значений некоторой непрерывной случайной величины  $Z^0$ .

Таблица 4.4 – Ряд распределения случайной величины  $Z$

$z_k$	4	8	10	14	19	22
$p_k = P(Z = z_k)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1

Обозначим середины всех внутренних интервалов групп как  $z_{k,k+1} = (z_k + z_{k+1}) / 2$ .

Обычно при группировке данных левую границу  $z_{0,1}$  первого интервала и правую границу последнего интервала определяют следующим образом [39]:  $z_{0,1} = z_1 - \frac{z_2 - z_1}{2}$ ,

$z_{6,7} = z_6 + \frac{z_6 - z_7}{2}$ . В результате от ряда распределения из таблицы 4.4 перейдем к группировке (см. таблицу 4.5).

Таблица 4.5 – Группировка для случайной величины  $Z$

Группа	$(z_{0,1}, z_{1,2})$	$(z_{1,2}, z_{2,3})$	$(z_{2,3}, z_{3,4})$	$(z_{3,4}, z_{4,5})$	$(z_{4,5}, z_{5,6})$	$(z_{5,6}, z_{6,7})$
	(2; 6)	(6; 9)	(9; 12)	(12; 16,5)	(16,5; 20,5)	(20,5; 23,5)
$p_k$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1

Считая, что на каждом интервале некоторая непрерывная случайная величина  $Y$  распределена равномерно, с учетом заданных вероятностей  $p_k$ , достаточно просто восстановить плотность вероятности  $p_Y(x)$ : на каждом  $k$ -м интервале она будет постоянна и равна  $p_k / (z_{k,k+1} - z_{k-1,k})$ . На рисунке 4.10 приведен график плотности вероятности  $p_Y(x)$ .

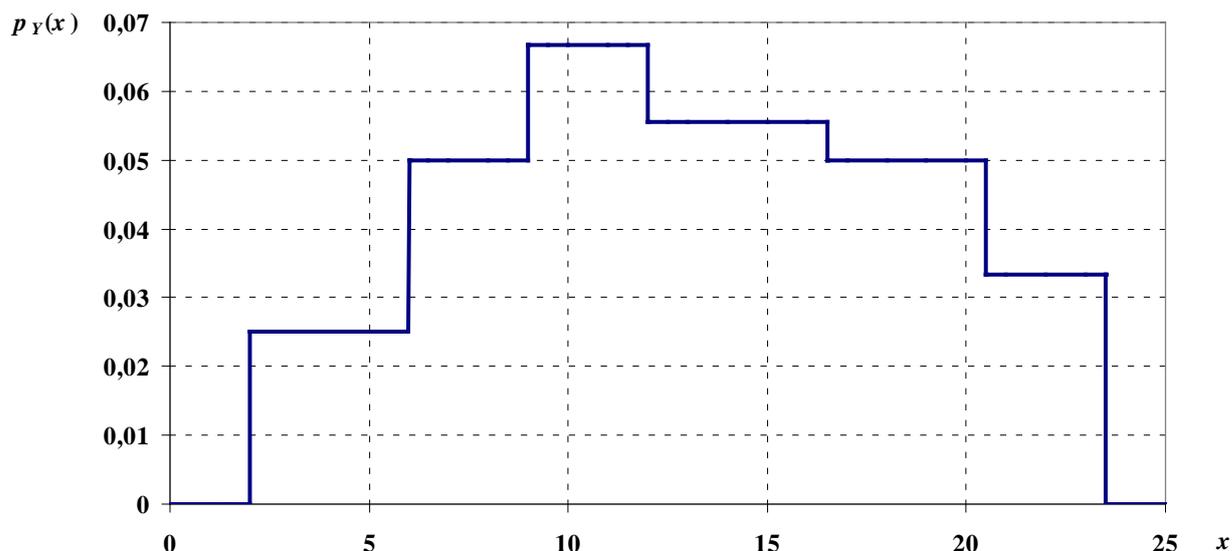


Рисунок 4.10 – График плотности вероятности  $p_Y(x)$

В общем случае для ряда распределения из таблицы 4.3 аппроксимирующая плотность вероятности непрерывной случайной величины  $p_{\tilde{Z}}(x)$  будет равна

$$p_{\tilde{Z}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; z_{0,1}], \\ p_k^*, & x \in (z_{k-1,k}; z_{k,k+1}], \\ 0, & x \in (z_{n,n+1}; +\infty), \end{cases} \quad (4.15)$$

где

$$p_k^* = \frac{P_k}{z_{k,k+1} - z_{k-1,k}}, \quad z_{0,1} = z_1 - \frac{z_2 - z_1}{2}, \quad z_{k,k+1} = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}, \quad z_{n,n+1} = z_n + \frac{z_n - z_{n-1}}{2},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теперь вычисляем оценку дифференциальной энтропии распределения (4.15) по формуле

$$H(\tilde{Z}) = -\sum_{k=1}^n p_k^* \ln p_k^* \cdot (z_{k,k+1} - z_{k-1,k}).$$

**Случай 2. Балльные показатели.** Пусть исследуемая непрерывная случайная величина  $Z^0$  была в результате некоторых преобразований заменена на ряд балльных показателей (для определенности считаем баллы от 1 до  $M$ ) (см. таблицу 4.6).

Таблица 4.6 – Ряд распределения балльной случайной величины  $Z$

$Z$	1	2	3	...	$M-1$	$M$
$p_k = P(Z = k)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_{M-1}$	$p_M$

Очевидно, что это частный случай рассмотренного выше случая группировок, если приравнять  $z_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . Тогда вместо (4.15) получим формулу для аппроксимирующей плотности вероятности непрерывной случайной величины  $p_{\bar{z}}(x)$

$$p_{\bar{z}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; z_{0,1}], \\ p_k / 2, & \\ 0, & x \in (z_{M,M+1}; +\infty), \end{cases}$$

где

$$z_{k,k+1} = k + 0,5, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

**Пример.** Сгенерируем выборку из стандартного нормального распределения  $Z^0$  объема 100 чисел. Выборочное среднее квадратическое отклонение оказалось равным  $s = 0,9278$ . Дифференциальная энтропия равна  $H(Z^0) = \ln s \sqrt{2\pi e} = 1,344$  [41].

Теперь сгруппирует данные на 7 интервалов (см. таблицу 4.7). Ширина интервала каждой группы оказалась равной  $\Delta = 0,59$ .

Таблица 4.7 – Группировка для выборки из 100 наблюдений

$(z_{0,1}, z_{1,2})$	$(z_{1,2}, z_{2,3})$	$(z_{2,3}, z_{3,4})$	$(z_{3,4}, z_{4,5})$
$(-2,19; -1,6)$	$(-1,6; -1,01)$	$(-1,01; -0,42)$	$(-0,42; 0,17)$
$p_1 = 0,06$	$p_2 = 0,13$	$p_3 = 0,18$	$p_4 = 0,16$
$(z_{4,5}, z_{5,6})$	$(z_{5,6}, z_{6,7})$	$(z_{5,6}, z_{6,7})$	-
$(0,17; 0,76)$	$(0,76; 1,35)$	$(1,35; 1,94)$	-
$p_5 = 0,29$	$p_6 = 0,12$	$p_7 = 0,06$	-

Дифференциальная энтропия для распределения, задаваемого таблице 4.7, равна

$$H(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p_z(x) \ln p_z(x) dx = -\sum_{k=1}^7 \frac{p_k}{\Delta} \ln \left( \frac{p_k}{\Delta} \right) \Delta = 1,291..$$

Разница между величинами  $H(Z)$  и  $H(Z^0)$  составила менее 4%, что говорит о достаточно точной оценке дифференциальной энтропии.

#### 4.3.4 Выводы

Показано, что дифференциальная энтропия не может использоваться при моделировании дискретных случайных величин.

Для случаев, когда дискретные случайные величины получаются в результате группирования данных или переходу к балльным показателям, возможно использование дифференциальной энтропии. Это достигается за счет перехода от дискретных случайных величин к их аппроксимациям непрерывными случайными величинами, имеющими кусочно-линейные функции распределения.

Описана методика энтропийного моделирования многомерных стохастических систем, все или часть компонент которых являются балльными показателями или получены с помощью группировки.

#### 4.4 Моделирование риска в неоднородных стохастических системах

Реальные объекты не всегда удается адекватно описать в виде гауссовских систем. Это часто вызвано неоднородностью исследуемой выборочной совокупности, в которой могут присутствовать несколько выраженных однородных кластеров, каждый из которых может быть описан гауссовским случайным вектором. В этом случае, как показали результаты моделирования, рассмотрение всей выборки в виде однородной гауссовской системы приводит к значительным ошибкам при оценивании риска. К таким совокупностям, например, можно отнести многомерные данные в медицине и региональной экономике. Поэтому необходимо в модели риска учесть негауссовость рассматриваемых многомерных данных. Рассмотрены два алгоритма для оценивания параметров распределений кластеров неоднородных стохастических систем. Первый алгоритм использует известную модель смеси гауссиан. Второй алгоритм основан на дискриминантном анализе. Предложена новая модель многомерного риска, в которой стохастическая система описывается в виде совокупности нескольких взаимно независимых гауссовских систем, для каждой из которых определяется или задается вероятность (доля) ее присутствия в исследуемой совокупности. Рассмотрен случай, когда

исследуемая выборка состоит из совокупности двух гауссовских систем. Приведены результаты апробации на модельных данных.

#### 4.4.1 Введение

Моделирование риска обычно включает в себя выделение опасных исходов, количественное задание последствий от их наступления и оценку их вероятностей [42]. Вклад различных рисков объединяют и рассматривают одномерную случайную величину [43–45]. Однако у такой модели есть недостатки. Во-первых, не всегда известны заранее все возможные опасные исходы и, соответственно, мы не знаем их вероятности. Во-вторых, реальные системы обычно имеют много различных факторов риска. А поскольку они могут быть взаимосвязанными, то необходимо факторы риска рассматривать совместно, т.е. возникает потребность в многомерном моделировании риска.

В [28] предложен подход к моделированию многомерного риска. Он был реализован для распространенного случая гауссовых систем [46]. Однако реальные объекты (например, в медицине и региональной экономике) не всегда удается адекватно описать в виде гауссовых систем. Это часто вызвано неоднородностью исследуемой выборочной совокупности, в которой могут присутствовать несколько выраженных однородных подмножеств, каждое из которых может быть описано гауссовым случайным вектором. В этом случае, как показали результаты моделирования, рассмотрение всей выборки в виде однородной гауссовой системы может приводить к значительным ошибкам при оценивании риска. Поэтому необходимо в модели риска учесть негауссовость системы.

Опишем новую модель многомерного риска, в которой стохастическая система описывается в виде совокупности нескольких взаимно независимых гауссовых систем, для каждой из которых определяется или задается вероятность (доля) ее присутствия в исследуемой совокупности [47]. Подробно рассмотрим случай, когда исследуемая выборка формируется из совокупности двух гауссовых систем.

#### 4.4.2 Материал и методы исследования

Рассмотрим неоднородную стохастическую систему  $S$ . Выделим в ней  $M$  факторов риска  $X_j$  и будем считать их компонентами случайного вектора  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_M)$ . В отличие от [46], когда  $\mathbf{X}$  представлял собой гауссов случайный вектор, рассмотрим более

общий случай  $\mathbf{X} = \bigcup_{k=1}^K \mathbf{X}_k$ , где все случайные векторы  $\mathbf{X}_k$  являются гауссовыми с соответствующими распределениями  $F_{\mathbf{X}_k}(\mathbf{x})$ . Функция распределения случайного вектора  $\mathbf{X}$  может быть представлена как

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K v_k F_{\mathbf{X}_k}(\mathbf{x}), \quad \sum_{k=1}^K v_k = 1, \quad \forall k \quad 0 \leq v_k \leq 1. \quad (4.16)$$

Представление (4.16) позволяет учесть неоднородность стохастических систем. Действительно, мы фактически здесь имеем совокупность  $K$  подмножеств (кластеров). Например, в популяции могут быть как здоровые, так и больные люди, при рассмотрении регионов регионы также могут делиться на несколько групп (кластеров) и т.д.

Неблагоприятные исходы описываем в виде геометрической области, вид которой определяется конкретной системой, решаемой задачей и априорных сведений. Для определенности опишем предлагаемый подход на примере распространенной концепции нежелательных событий как больших и маловероятных значений случайного вектора  $\mathbf{X}$ . Тогда вероятность неблагоприятного исхода для случайного вектора  $\mathbf{X}$  равна [28]

$$P(D) = P(\mathbf{X} \in D), \quad D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{j=1}^M \frac{(x_j - z_j^*)^2}{B_j^2} \geq 1 \right\}, \quad (4.17)$$

где

$\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_M^*)$  – некоторое наиболее безопасное значение,

$B_j$  – пороговые уровни.

Очевидно, когда исход не лежит на одной из осей, то событие  $D$  может реализоваться и при отсутствии рисков отклонений по всем компонентам, (например, возможны ситуации, когда  $\mathbf{X} \in D$  и  $\forall j \quad X_j \notin D_j = (-\infty; z_j^* - B_j) \cup (z_j^* + B_j; +\infty)$ ). Риск оценим как [28]

$$r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_{\mathbf{R}^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где

$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  – плотность вероятности случайного вектора  $\mathbf{X}$ ,

$g(\mathbf{x})$  – функция последствий от опасных ситуаций.

Задав

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \notin D, \end{cases} \quad (4.18)$$

получим  $r(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} \in D)$ , т.е. риск будет равен вероятности возникновения неблагоприятного исхода. Оценка (4.18) хорошо интерпретируется, а также является удобным начальным приближением модели риска на ранней стадии исследования системы, когда сложно достаточно точно описать функцию  $g(\mathbf{x})$ .

#### 4.4.3 Результаты исследования и их обсуждение

Одной из проблем при использовании модели (4.16) является определение параметров распределений  $F_{x_k}(\mathbf{x})$  и вероятностей  $v_k$ . Ниже рассмотрим варианты решения на примере двух кластеров. Во-первых, можно воспользоваться дискриминантным анализом. Для реализации алгоритма поиска параметров, необходимо знать вероятность принадлежности очередного наблюдения тому или иному кластеру. Дискриминантный анализ на основе логистической регрессии [48] позволяет оценить эти вероятности. Алгоритм разыгрывания для оценки параметров распределений кластеров состоит в следующем.

Вход: *Data* – массив координат входных объектов; *probas* – вероятности принадлежности к кластерам каждой точки (длина массива равна длине массива *data*),  $N$  – количество розыгрышей,  $K$  – количество кластеров.

Выход: Параметры распределений каждого кластера.

Шаг 1. Вычисляем кумулятивную сумму для векторов вероятностей в кластерах для каждой точки, установить счетчик равным 0.

Шаг 2. Разыгрываем случайную величину  $p$ , равномерно распределенную на  $[0;1)$ .

Шаг 3. Для всех точек определяем по кумулятивному вектору вероятностей, в какой кластер соотносится точка. Номер кластера будет определяться индексом минимального значения элементов вектора  $\hat{p} \geq p$ .

Шаг 4. Выделяем из всего набора данных кластеры, полученные на шаге 3.

Шаг 5. Вычисляем оценки математических ожиданий и дисперсий для каждого кластера и записываем результаты, увеличиваем счетчик на 1.

Шаг 6. Если счетчик меньше  $N$  повторяем шаги 2–5, иначе вычисляем оценки математических ожиданий и дисперсий по  $N$  опытам. Усредненные по всем опытам оценки будут результатом оценки параметров.

Стоит отметить, что описанный алгоритм является частным случаем для двух кластеров и его можно расширить для любого конечного числа кластеров, вместо разыгрывания одной случайной величины  $p$ , будем разыгрывать вектор вероятностей  $\mathbf{p}$ , состоящий из  $K - 1$  элементов. Тогда попадание на основе этих значений наблюдений в тот или иной кластер будет описываться мультиномиальным распределением. Остальные шаги процедуры останутся неизменными.

Также можно использовать модель смеси гауссиан (GMM) [49]. GMM реализуется с помощью решения оптимизационной задачи максимального правдоподобия (Expectation Maximization) [50]. EM-алгоритм – общий метод нахождения оценок функции правдоподобия в моделях со скрытыми переменными. В данной статье рассматривается интерпретация смеси гауссовых распределений в терминах дискретных скрытых переменных.

Помимо того, что смеси распределений позволяют приближать сложные вероятностные распределения, с их помощью можно так же решать задачу кластеризации данных. Далее мы будем решать задачу кластеризации с помощью EM-алгоритма, предварительно приблизив решение алгоритмом  $k$ -средних [51].

Сравнительный анализ оценок параметров распределения кластеров показал, что оба алгоритма (на основе логистической регрессии и GMM) дали сравнимые по точности результаты.

Проведем расчет риска неоднородных систем с двумя кластерами. Рассмотрим пять модельных случаев систем из двух совокупностей, число компонент  $M = 2$ : 1 – каждая компонента имеет диагональную ковариационную матрицу; 2 – «вытянутые» рассеяния; 3 – каждая компонента состоит из коррелированных параметров; 4 – компоненты каждой из совокупности зависимы, между ними значимые пересечения; 5 – «непересекающиеся» классы. Методика эксперимента состояла в следующем.

Генерируем данные для модельных случаев с заданными параметрами – известными ковариациями и математическими ожиданиями. На всех модельных примерах доли совокупностей одинаковы, то есть вероятность попадания случайного наблюдения равна 0,5 для одного случая. Посмотрим, как эти доли могут влиять на значения риска. Для каждого из случаев заранее известны параметры распределений каждой совокупности – векторы средних и ковариации (в силу того, что считаем каждую из совокупностей представимой в виде гауссовского случайного вектора). В каждом из модельных примеров

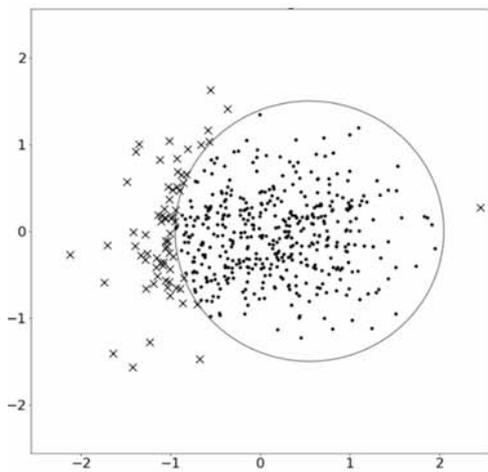
одна из совокупностей будет считаться «благоприятной», а границы области будут определяться эллипсом. Будем проводить эксперимент следующим образом:

- 1) Для каждого случая, по известным параметрам сгенерируем по 30 пар совокупностей.
- 2) Для каждого случая и каждой из 30 итоговых выборок попытаемся восстановить параметры двумя способами – с помощью алгоритма на основе логистической регрессии, а также с помощью EM-алгоритма (GMM-модель).
- 3) На основе восстановленных параметров сгенерировать достаточное количество наблюдений каждой совокупности.
- 4) Методом Монте-Карло выполнить расчет вероятности непопадания в благоприятную область. Это и будет вероятностью риска в системе.

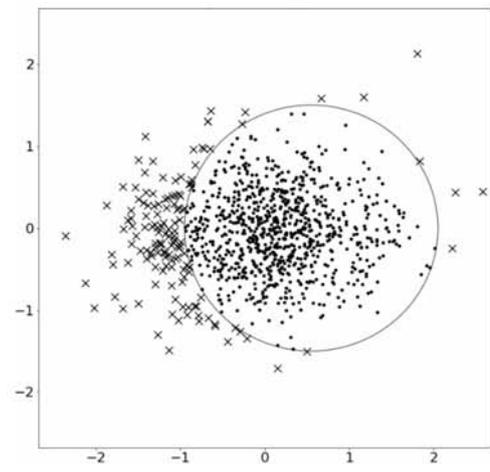
Поскольку на модельных примерах имеется информация об исходных параметрах распределений каждой совокупности, можно с высокой точностью оценить реальный риск. Также приведем расчет риска заданной системы, представленной в виде однородной гауссовской системы [28], и проведем расчет с восстановленными логистической регрессией и GMM параметрами.

На рисунках 4.11–4.15 благоприятная область отмечена эллипсом, благоприятные точки отмечены точками, а неблагоприятные точки отмечены крестиком. Вероятность риска – это отношение числа пересечений к общему числу наблюдений.

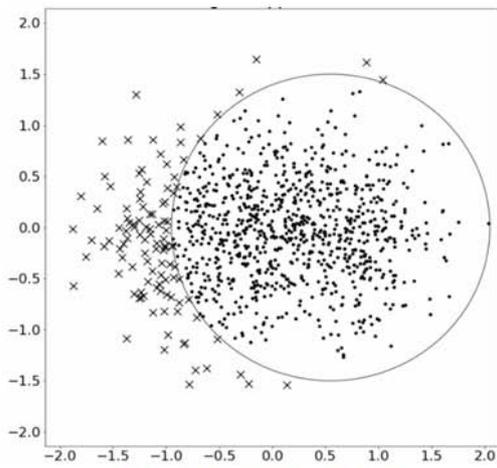
Анализ данных примеров показывает, что в четырех случаях из пяти использование модели в виде однородной гауссовской системы привело к значительному завышению оценки риска. Несмотря на то, что для первых двух случаев (рисунки 4.11, 4.12) нет выигрыша в точности оценки риска, снижения качества также не наблюдается. В остальных же случаях (рисунки 4.13–4.15) использование модели для неоднородной системы предпочтительнее, поскольку результаты расчета рисков более приближены и сравнимы с реальными показаниями, в то время как однородная модель существенно завышает эти показатели.



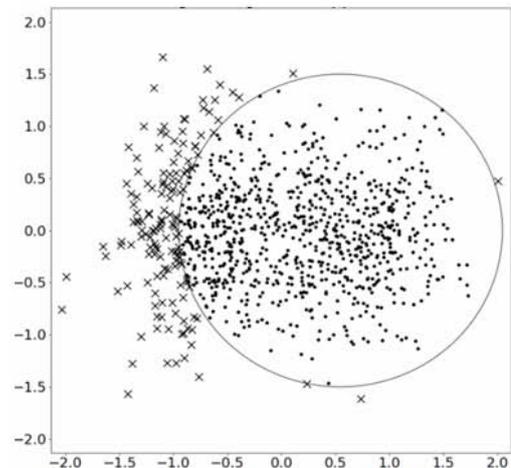
а) Реальная картина,  $P(D) = 0,124$



б) Однородная гауссовская система,  $P(D) = 0,123$

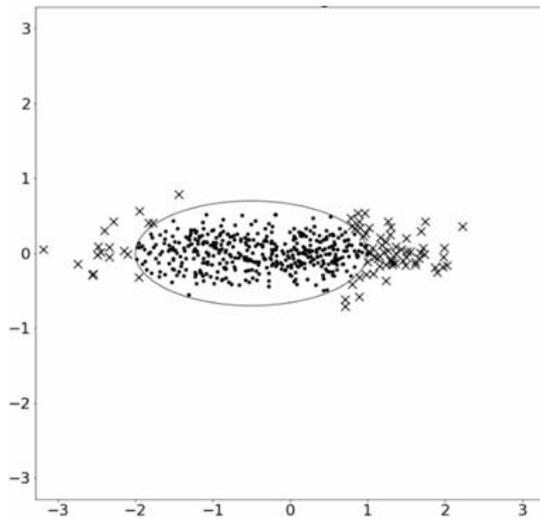


в) GMM,  $P(D) = 0,125$

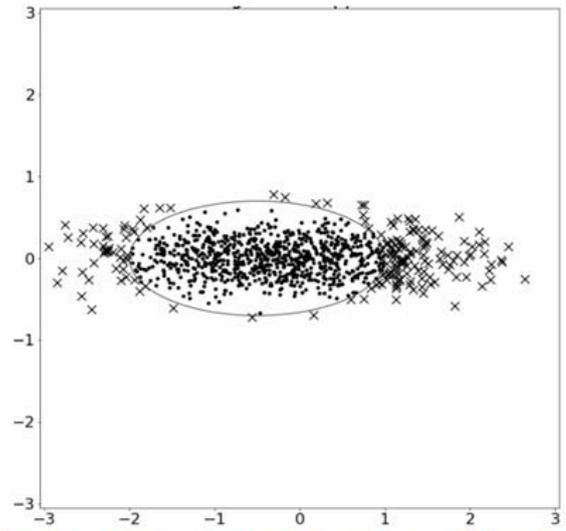


г) Логистическая регрессия,  $P(D) = 0,128$

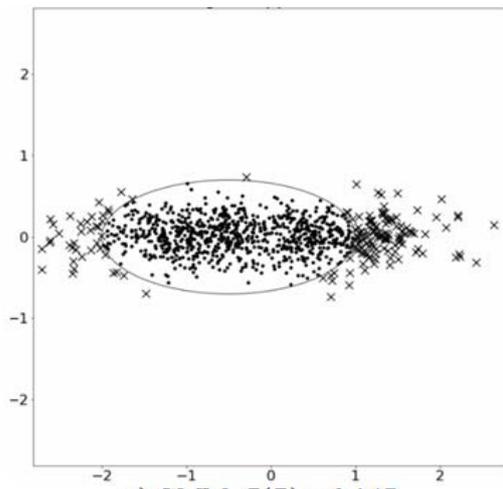
Рисунок 4.11 – Каждая компонента имеет диагональную ковариационную матрицу



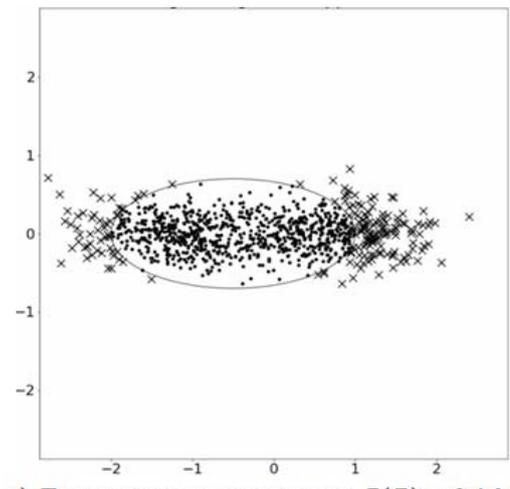
а) Реальная картина,  $P(D) = 0,143$



б) Однородная гауссовская система,  $P(D) = 0,169$

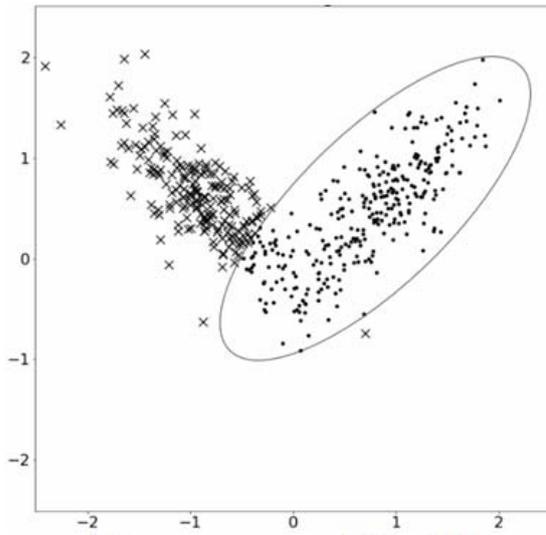


в) GMM,  $P(D) = 0,147$

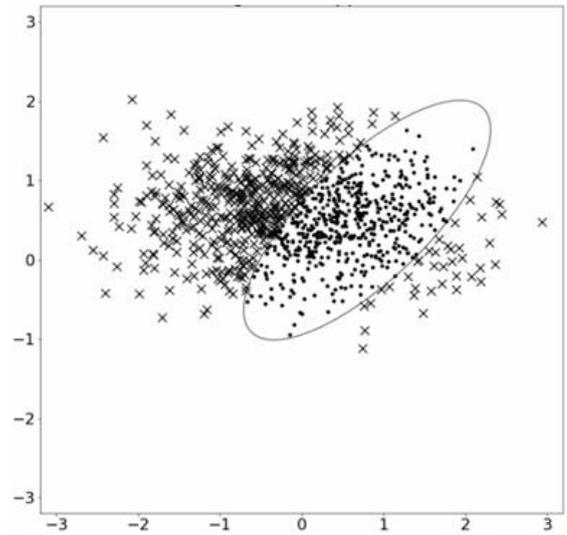


г) Логистическая регрессия,  $P(D) = 0,164$

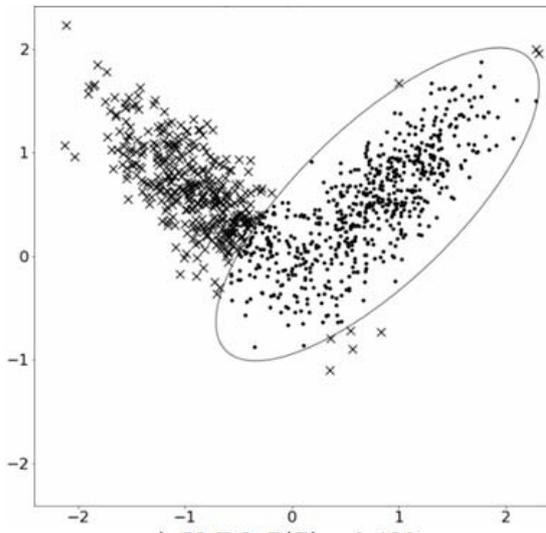
Рисунок 4.12 – «Вытянутые» рассеяния



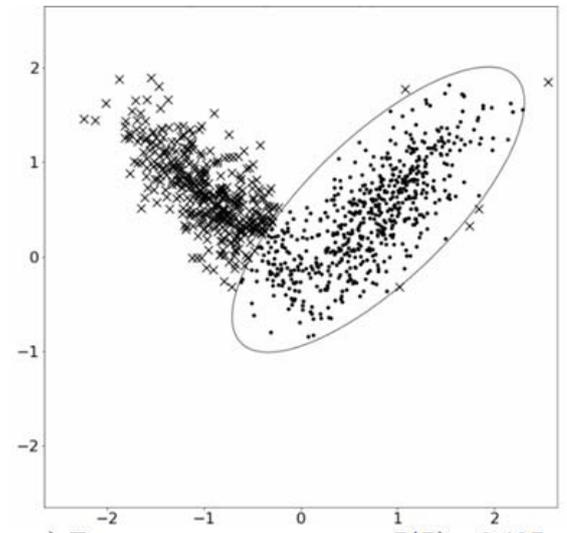
а) Реальная картина,  $P(D) = 0,415$



б) Однородная гауссовская система,  $P(D) = 0,492$

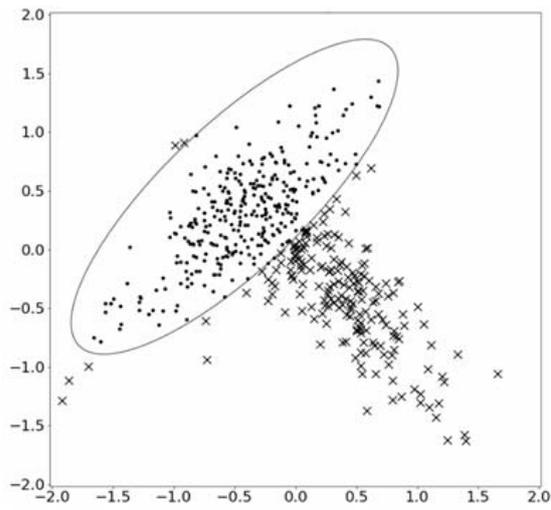


в) GMM,  $P(D) = 0,420$

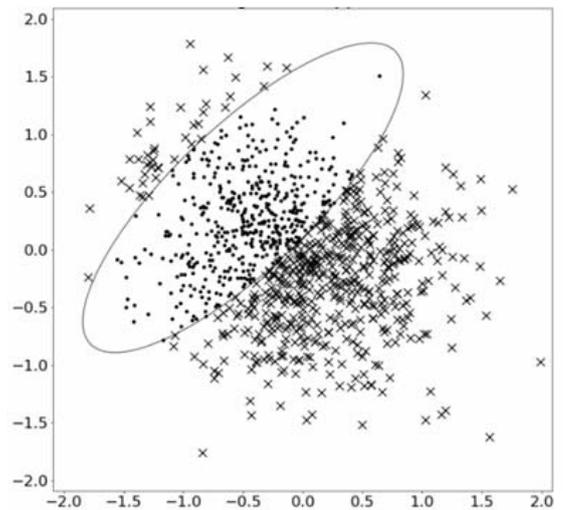


г) Логистическая регрессия,  $P(D) = 0,407$

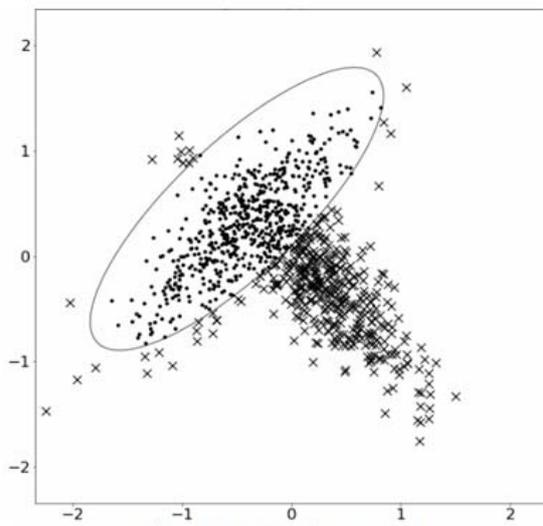
Рисунок 4.13 – Каждая компонента состоит из коррелированных параметров



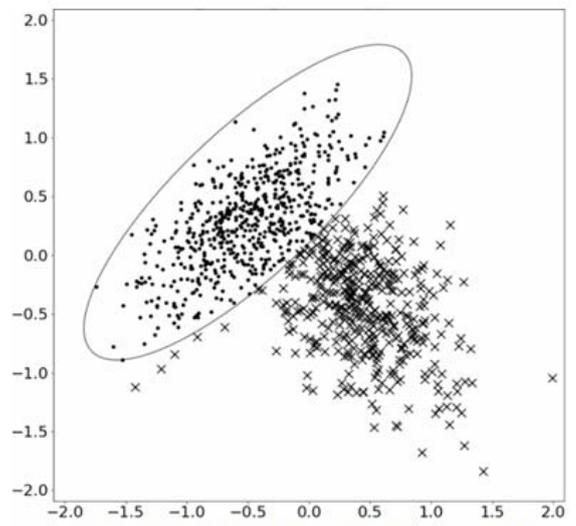
а) Реальная картина,  $P(D) = 0,443$



б) Однородная гауссовская система,  $P(D) = 0,549$

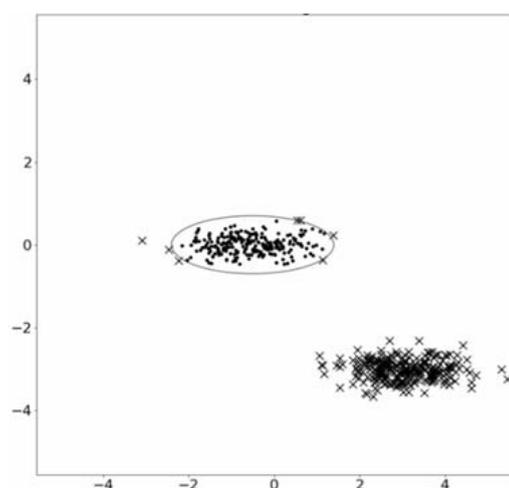


в) GMM,  $P(D) = 0,382$

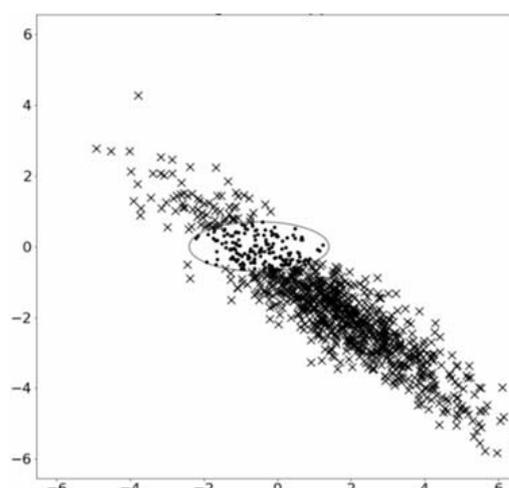


г) Логистическая регрессия,  $P(D) = 0,456$

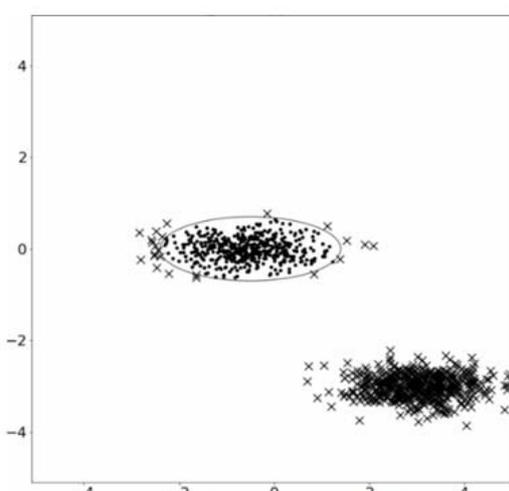
Рисунок 4.14 – Компоненты каждой из совокупности зависимы, между ними значимые пересечения



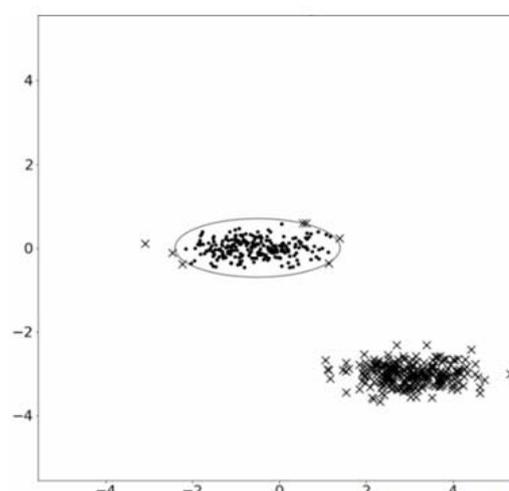
а) Реальная картина,  $P(D) = 0,524$



б) Однородная гауссовская система,  $P(D) = 0,812$



в) GMM,  $P(D) = 0,543$



г) Логистическая регрессия,  $P(D) = 0,529$

Рисунок 4.15 – «Непересекающиеся» классы

#### 4.4.4 Выводы

1) Показано, что представление неоднородных систем в виде гауссовского случайного вектора может приводить к значительным ошибкам в оценке риска.

2) Предложена модель многомерного риска для неоднородных стохастических систем. При этом система представляется в виде совокупности гауссовских случайных векторов.

3) Предложен и рассмотрен алгоритм для восстановления параметров распределения на основе вероятностей принадлежности каждой точки. В статье использовалась логистическая регрессия. Однако можно использовать и другие методы классификации.

4) GMM по сравнению с логистической регрессией имеет меньшую стабильность в расчете рисков, поэтому предпочтительнее использовать поиск параметров с помощью логистической регрессии. Но последний алгоритм вычислительно более затратен и требует некоторую информацию об исходных совокупностях в виде обучающей выборки.

#### **4.5 Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей**

Рассмотрена задача оценивания линейных регрессионных уравнений методом наименьших модулей. Точные методы его реализации значительно проигрывают по быстродействию методу наименьших квадратов. Наиболее быстрый алгоритм, основанный на покоординатном спуске по узловым прямым, имеет вычислительную сложность, пропорциональную квадрату числа наблюдений, что ограничивает практическое применение в задачах мониторинга и диагностики. Опишем более быстрый вариант реализации спуска по узловым прямым, а также оценим его быстродействие [52]. Снижение вычислительных затрат достигнуто за счет того, что вместо вычисления значений целевой функции в узловых точках находят ее производную в окрестности этих точек по направлению узловой прямой. Приведена оценка вычислительной эффективности градиентного спуска по узловым прямым. Для типового компьютера был проведен сравнительный анализ среднего времени вычислений для различных алгоритмов. Приведен простой пример, иллюстрирующий реализацию градиентного спуска. Наряду со снижением вычислительных затрат, устраняется возможность накопления вычислительных погрешностей при определении значений целевой функции для больших выборок. Кроме этого градиентный спуск достаточно просто реализуется. Это позволяет использовать метод наименьших модулей как альтернативу методу наименьших квадратов в различных практических приложениях.

##### **4.5.1 Введение**

Линейное регрессионное уравнение является одной из наиболее распространенных математических моделей, используемых при описании экспериментальных данных [53, с. 285]. При оценивании линейного регрессионного уравнения требуется по наблюдаемым данным  $(X, y)$  восстановить (определить) вектор  $\mathbf{a}$  коэффициентов регрессии в модели

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.19)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} - \text{вектор ненаблюдаемых случайных погрешностей (ошибок, невязок)}.$$

Для оценивания линейных регрессионных моделей (4.19) обычно используют метод наименьших квадратов (МНК). Это связано с простотой вычисления и оптимальными свойствами оценок коэффициентов модели при выполнении условий Гаусса-Маркова и нормальном распределении случайных ошибок [54]. Однако эти условия часто не выполняются [55, с. 40, 56], что может привести к снижению точности оценок коэффициентов, особенно когда у плотности вероятности случайных ошибок более вытянутые хвосты [57]. В этих случаях необходимо использовать устойчивые методы оценивания, которые основаны на минимизации суммы, не квадратов, а модулей (или функций от модулей) невязок. Метод наименьших модулей (МНМ) для нахождения коэффициентов регрессии в (4.19) представляет собой задачу минимизации [58]

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle| \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m}. \quad (4.20)$$

Целевая функция  $Q(\mathbf{a})$  является выпуклой, непрерывной, кусочно-линейной и ограниченной снизу, поэтому задача (4.20) имеет единственный минимум. Поскольку во всех точках, где у функции  $Q(\mathbf{a})$  существует производная, она линейна, поэтому ее

минимум может быть только в особых точках (в одной точке, или на выпуклом множестве, ограниченном несколькими особыми точками).

МНМ основан на более общих предположениях относительно случайных погрешностей  $\epsilon$ , чем МНК. Этот метод обеспечивает максимум функции правдоподобия, если ошибки измерений подчиняются закону Лапласа [58]. Статистические свойства и условия состоятельности приведены в [59, 60], в частности для состоятельности МНМ-оценок в задаче (4.19) компоненты вектора  $\epsilon$  должны быть взаимно независимыми (их функции распределения могут быть произвольными),  $P\{\epsilon_i < 0\} = P\{\epsilon_i > 0\} = 0,5$ ,  $rank(\mathbf{X}) = m < n$ .

Несмотря на то, что целевая функция не является всюду дифференцируемой, существует несколько точных и приближенных алгоритмов решения задачи (4.20). В [61] приведен обзор известных алгоритмов реализации МНМ. Однако алгоритмы реализации МНМ проигрывают в вычислительной эффективности по сравнению с МНК, имеющим вычислительную сложность порядка  $O(m^2n)$ . В [62] описан алгоритм точной реализации МНМ с помощью спуска по узловым прямым, имеющий вычислительную сложность  $O(m^2n^2)$ , что примерно в  $O(n)$  раз больше. Несмотря на достаточно высокое быстродействие и нахождение точного решения, применение данного алгоритма ограничено при использовании в задачах мониторинга и диагностики быстропеременных процессов.

Известный алгоритм спуска по узловым прямым имеет нулевой порядок. Очевидно, что для выпуклых функций методы первого порядка, использующие производную, потенциально обладают более высокой скоростью сходимости по сравнению с методами нулевого порядка. В описанном алгоритме спуска по узловым прямым приходится вычислять значения функции  $Q(\mathbf{a})$  в узловых точках каждой прямой (это составляет  $O(mn)$  вычислительных операций), по которой осуществляется спуск. Этого можно избежать за счет замены вычисления значений функции нахождение ее производной по направлению в окрестности узловых точек, которая имеет достаточно простой вид.

Опишем более быстрый вариант реализации спуска по узловым прямым, в котором вместо вычисления значений целевой функции находят ее производную по направлению в окрестности узловых точек, а также оценка вычислительной эффективности данного алгоритма.

#### 4.5.2 Методы исследования

Обозначим  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$  – множество всех гиперплоскостей вида

$$\Omega_i = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i, y_i): y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.21)$$

Назовем узловой точкой, точку пересечения  $m$  независимых гиперплоскостей вида (4.21):

$$\mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_m)} = \bigcap_{s \in M} \Omega_s, M = \{k_1, \dots, k_m\}, 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq m. \quad (4.22)$$

Назовем узловой такую прямую, которая является пересечением  $(m - 1)$  непараллельных гиперплоскостей  $\Omega_i: l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \bigcap \Omega_i, i \in \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}$ .

Алгоритм решения задачи (4.20) основан на спуске к точному решению, двигаясь вдоль узловых прямых  $l$ . Пусть  $U$  – множество всех узловых точек (4.22). В [62] показано, что минимум функции  $Q(\mathbf{a})$  принадлежит множеству  $U$  и достигается за конечное число шагов.

За начальное приближение берем узловую точку  $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_m)}$ , являющуюся пересечением  $m$  произвольных гиперплоскостей  $\Omega_{k_1}, \Omega_{k_2}, \dots, \Omega_{k_m}$ , путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):  $y_i - \langle \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{x}_i \rangle = 0, i = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Например, можно взять  $i = 1, 2, \dots, m$ . Исключив одну из гиперплоскостей, например  $\Omega_{k_m}$ , получим узловую прямую  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ . Расширенная матрица СЛАУ прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  имеет вид

$$\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 1 & x_{k_2,2} & x_{k_2,3} & \dots & x_{k_2,m-1} & x_{k_2,m} & y_{k_2} \\ 1 & x_{k_3,2} & x_{k_3,3} & \dots & x_{k_3,m-1} & x_{k_3,m} & y_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k_{m-1},2} & x_{k_{m-1},3} & \dots & x_{k_{m-1},m-1} & x_{k_{m-1},m} & y_{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Применив алгоритм прямого хода метода Гаусса, преобразуем матрицу  $\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  к ступенчатому виду

$$\mathbf{A}'_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 0 & 1 & x'_{k_2,3} & \dots & x'_{k_2,m-1} & x'_{k_2,m} & y'_{k_2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x'_{k_3,m-1} & x'_{k_3,m} & y'_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x'_{k_{m-1},m} & y'_{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Используя ступенчатую матрицу  $\mathbf{A}'_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ , можно значительно сократить вычислительные затраты на нахождение всех узловых точек, лежащих на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ .

Действительно, для любой  $i$ -й узловой точки имеем расширенную матрицу

$$\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, i)} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 0 & 1 & x'_{k_2,3} & \dots & x'_{k_2,m-1} & x'_{k_2,m} & y'_{k_2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x'_{k_3,m-1} & x'_{k_3,m} & y'_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x'_{k_{m-1},m} & y'_{k_{m-1}} \\ 1 & x_{i,2} & x_{i,3} & \dots & x_{i,m-1} & x_{i,m} & y_i \end{pmatrix},, \quad (4.23)$$

где

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1} \leq n, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}.$$

Находим все узловые точки, лежащие на  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ . Варьируя номер  $i$  в (4.23), найдем все  $(n - 1)$  узловых точек на прямой, и упорядочиваем их по направлению этой прямой. Далее в известном алгоритме (назовем его покоординатным спуском по узловым прямым) в одной из узловых точек  $\mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, j)}$  с находят помощью направленного спуска минимум функции  $Q(\mathbf{a})$  на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  [62]. После этого есть два варианта продолжения алгоритма:

1) продолжить спуск из точки  $\mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, j)}$  по другой узловой прямой и т.д. до тех пор, пока спуск будет невозможен;

2) выполнить спуск из точки  $\mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, j)}$  по всем остальным  $(m - 1)$  узловым прямым, найти в каждой из них минимум  $Q(\mathbf{a})$  и перейти в узловую точку с наименьшим значением целевой функции и снова продолжить спуск из этой точки.

Исследования показали, что второй вариант более эффективен. Его вычислительная сложность составила  $W = O(m^2 n^2)$ . При этом существенная часть затрат уходит на вычисления значений функции  $Q(\mathbf{a})$  в узловых точках прямых, кроме того для больших объемов выборок  $n$  возможно накопление вычислительных погрешностей.

Линейный вид выражений под знаком модуля в (4.20) приводит к простому виду производной функции  $Q(\mathbf{a})$  по направлению узловой прямой. Покажем это.

В узловой точке  $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_m)}$  вычисляем значение производной функции  $Q(\mathbf{a})$  по направлению узловой прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ . Двигаемся из узловой точки  $\mathbf{u}^{(0)}$  по направлению убывания производной по направлению. Эта производная не существует только в узловых точках. Поэтому в очередной узловой точке  $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_m^{(1)})^T$  определяем производную с разных сторон. Каждая из производных равна сумме  $n$  слагаемых по числу наблюдений

$$\frac{\partial Q(\mathbf{u}^{(1)})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} = \sum_{i=1}^n (c_1 + x_{i2}c_2 + \dots + x_{im}c_m) \cdot \text{sign}\left(\sum_{j=1}^m u_j^{(1)}x_{ij} - y_i\right), \quad (4.24)$$

где

$$\mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T - \text{направляющий вектор узловой прямой } l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}.$$

При переходе через узловую точку изменяется только одно из слагаемых в (4.24). Его номер соответствует номеру гиперплоскости, пересекающей в этой узловой точке  $\mathbf{u}^{(1)}$

прямую  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ . Если знак производной по направлению перед  $\mathbf{u}^{(1)}$   $\left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \right|_{\mathbf{u}^{(1)}}$  и после

$\mathbf{u}^{(1)}$   $\left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \right|_{\mathbf{u}^{(1)}}$  меняется с отрицательного на положительной (или производная станет

равной нулю), то в этой точке целевая функция принимает наименьшее значение по узловой прямой. Тогда вместо  $\mathbf{u}^{(0)}$  фиксируем  $\mathbf{u}^{(1)}$ . Если на данной прямой целевая функция в исходной узловой точке  $\mathbf{u}^{(0)}$  принимает наименьшее значение (производная по направлению при переходе через  $\mathbf{u}^{(0)}$  в ту и другую сторону становится больше или равной нулю), то переходим к следующей узловой прямой, проходящей через эту узловую точку. Здесь также как и ранее можно поочередно переходить на другую узловую прямую или по

очереди спускаться по всем  $m$  узловым прямым и в качестве следующей узловой точки брать ту, у которой значений целевой функции будет наименьшим.

В случае, когда вместо  $\mathbf{u}^{(0)}$  фиксируем  $\mathbf{u}^{(1)}$ , тогда из точки  $\mathbf{u}^{(1)}$  переходим на другую узловую прямую, и продолжаем спуск по ней по тому же принципу. В результате будет найдена узловая точка  $\mathbf{u}^{(*)}$ , спуск из которой невозможен. Эта узловая точка будет являться точным решением задачи (4.20). В [62] доказано, что алгоритм спуска вдоль узловых прямых для нахождения решения задачи (4.20), сходится к точному решению за конечное число шагов. Назовем вариант алгоритма, использующий производную по направлению (4.24) градиентным спуском по узловым прямым.

Рассмотрим теперь, как градиентный спуск повлияют на вычислительную сложность известного алгоритма [62], в котором рассматривается спуск из узловой точки по всем проходящим через нее узловым прямым. Теперь не требуется вычислять значения целевой функции во всех узловых точках, лежащих на рассматриваемой узловой прямой. Число вычислений производных по направлению для каждой узловой прямой составляет  $O(mn)$ . Поэтому средняя вычислительная сложность станет равной

$$P = O \left\{ m^2 \ln n \cdot \left( m^3 + (n-m) \cdot m^2 + (n-m) \cdot \ln(n-m) + \frac{mn}{\ln n} + mn \right) \right\} \leq \\ \leq O(m^2 n \ln n \cdot (m^2 + \ln n)) = O(m^2 n \ln n \cdot \max(m^2, \ln n)).$$

Отметим, что при  $n \gg m$

$$P = O(m^2 n \ln n \cdot \max(m^2, \ln n)) \leq O(m^2 n \ln^2 n) < O(m^2 n^{1.4}),$$

т.е. градиентный спуск приводит к существенному повышению быстродействия алгоритма.

### 4.5.3 Пример реализации

Рассмотрим реализацию алгоритма на простом примере оценивания парной линейной регрессии  $y = a_1 + a_2 x$  по четырем наблюдениям  $(x_1, y_1) = (1; 0,4)$ ,  $(x_2, y_2) = (2; 2,4)$ ,  $(x_3, y_3) = (3; 2,3)$ ,  $(x_4, y_4) = (4; 4,9)$ .

На рисунке 4.16 показаны все 4 узловых прямых и 6 узловых точек, соответствующие данным наблюдениям, осями координат являются значения коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$ . Узловые прямые и точки:

$$l_{(1)}: a_1 + a_2 = 0,4, \quad l_{(2)}: a_1 + 2a_2 = 2,4, \quad l_{(3)}: a_1 + 3a_2 = 2,3, \quad l_{(4)}: a_1 + 4a_2 = 4,9;$$

$$A^{(1)} = l_{(1)} \cap l_{(2)} = (A_1^{(1)}; A_2^{(1)}) = (-1,6; 2); \quad A^{(2)} = l_{(1)} \cap l_{(3)} = (-0,55; 0,95);$$

$$A^{(3)} = l_{(1)} \cap l_{(4)} = (-1,1; 1,5); \quad A^{(4)} = l_{(2)} \cap l_{(3)} = (2,6; -0,1);$$

$$A^{(5)} = l_{(2)} \cap l_{(4)} = (-0,1; 1,25); \quad A^{(6)} = l_{(3)} \cap l_{(4)} = (-5,5; 2,6).$$

Ввиду кусочной линейности целевой функции производная по направлению во всех внутренних точках между соседними узловыми точками постоянна. Поэтому достаточно вычислять производные между узловыми точками.

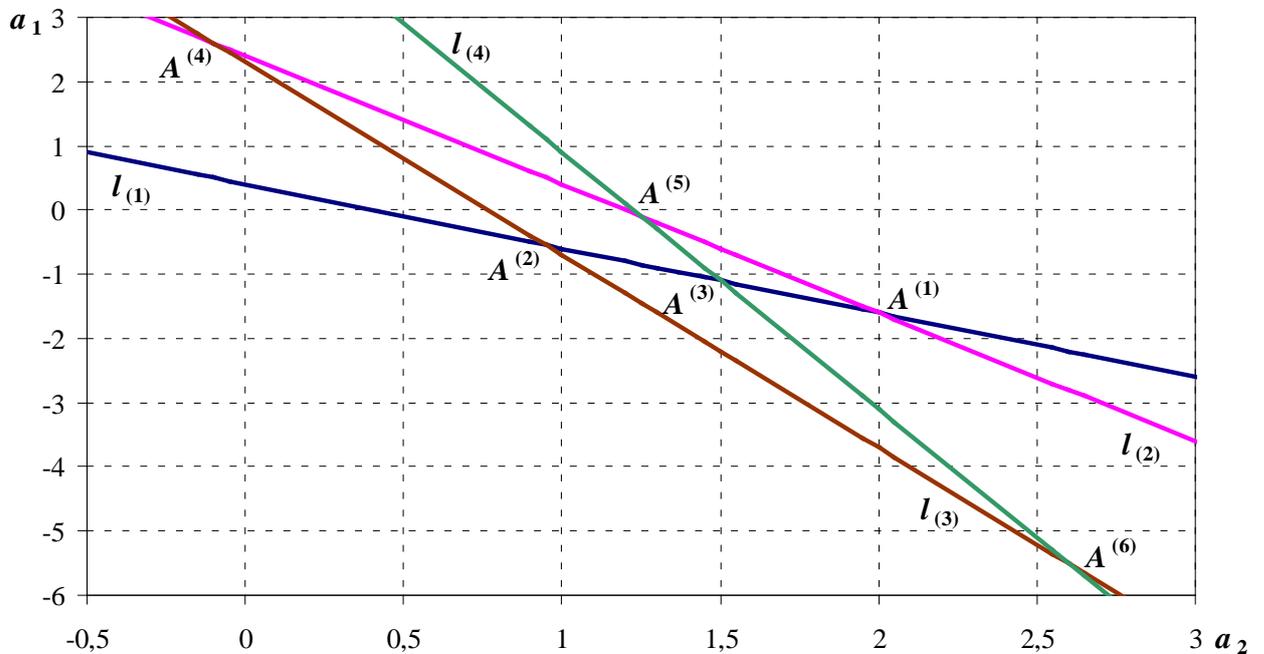


Рисунок 4.16 – Узловые прямые и точки

Для иллюстрации градиентного спуска рассмотрим спуск по прямой  $l_{(1)}$ . Упорядочим узловые точки этой прямой по направлению вектора  $\overrightarrow{A^{(1)}A^{(3)}}$ :  $A^{(1)}$ ,  $A^{(3)}$ ,  $A^{(2)}$ . Направляющий вектор прямой  $l_{(1)}$

$$\mathbf{l}_{(1)} = \overrightarrow{A^{(1)}A^{(3)}} / \left| \overrightarrow{A^{(1)}A^{(3)}} \right| = (\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2).$$

Обозначим  $A^{(kj)}$  – координаты середины отрезка  $A^{(k)}A^{(j)}$ . Вычисляем производные по направлению  $\mathbf{l}_{(1)}$  до и после точек  $A^{(1)}$ ,  $A^{(3)}$ ,  $A^{(2)}$ , двигаясь по прямой  $l_{(1)}$  по формуле (4.6):

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(1)}} \right|_{A_+^{(1)}} = \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(1)}} \right|_{A_+^{(3)}} = \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(1)}} \right|_{A_+^{(13)}} = \\ & = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \cdot \text{sign} \left( A_1^{(13)} + A_2^{(13)} x_i - y_i \right) = \\ & = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \cdot \text{sign}(-1,35 + 1,75x_i - y_i) = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign}(-1,35 + 1,75 \cdot 2 - 2,4) - \\ & -\sqrt{2} \cdot \text{sign}(-1,35 + 1,75 \cdot 3 - 2,3) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign}(-1,35 + 1,75 \cdot 4 - 4,9) = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) - \sqrt{2} \cdot (+1) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (+1) = -2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{l}}_{(1)}} \right|_{A_+^{(3)}} = \left. \frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{l}}_{(1)}} \right|_{A_+^{(2)}} = \left. \frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{l}}_{(1)}} \right|_{A_{32}} = \\ & = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \cdot \text{sign} \left( A_1^{(32)} + A_2^{(32)} x_i - y_i \right) = \\ & = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \cdot \text{sign}(-0,825 + 1,225x_i - y_i) = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign}(-0,825 + 1,225 \cdot 2 - 2,4) - \\ & -\sqrt{2} \cdot \text{sign}(-0,825 + 1,225 \cdot 3 - 2,3) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign}(-0,825 + 1,225 \cdot 4 - 4,9) = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) - \sqrt{2} \cdot (+1) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = \sqrt{2} > 0, \end{aligned}$$

т.е. на прямой  $l_{(1)}$  минимум находится в точке  $A_3$ . Можно показать, что и на прямой  $l_{(4)}$  минимум будет в этой же точке. Таким образом, минимум целевой функции (4.20) лежит в узловой точке  $A_3$  и уравнение регрессии имеет вид:  $y = -1,1 + 1,5x$ .

#### 4.5.4 Обсуждение результатов

Исследуем характеристики алгоритма градиентного спуска по узловым прямым, реализованного в виде программы [63]. Методом статистических испытаний Монте-Карло был проведен ряд экспериментов на ПК с процессором Intel Core™ i3-2350M CPU 2.30 GHz и ОЗУ 8 GB. Рассчитывались регрессионные зависимости времени вычислений  $T$  от  $m$  и  $n$  ( $2 \leq m \leq 10$ ,  $2^5 \leq n \leq 2^{10}$ ) четырьмя вариантами алгоритма спуска по узловым прямым для различных видов распределений случайных ошибок (нормальное, нормальное с засорениями другим распределением, в том числе с односторонними и двухсторонними вытянутыми хвостами), объем выборки – 81 наблюдение. Все уравнения статистически значимые, их вид и значения коэффициентов детерминации  $R^2$  приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Характеристики среднего времени вычислений алгоритмов

Показатели	Покоординатный спуск по одной прямой	Покоординатный спуск по всем прямым	Градиентный спуск по одной прямой	Градиентный спуск по всем прямым
$T(m, n)$ , сек.	$T = \frac{n^{7,86} \ln^{2,50} m}{\ln^{25,69} n}$	$T = \frac{n^{6,45} \ln^{2,81} m}{\ln^{22,39} n}$	$T = \frac{n^{6,73} \ln^{3,91} m}{\ln^{24,11} n}$	$T = \frac{n^{6,27} \ln^{3,33} m}{\ln^{22,65} n}$
$R^2$	0,960	0,962	0,972	0,980

На рисунках 4.17, 4.18 приведены зависимости среднего времени вычислений от объема выборки для покоординатного и градиентного спуска по узловым прямым.

Видим, что градиентный спуск выигрывает по быстродействию по сравнению с покоординатным спуском. Покоординатный спуск по одной прямой использовать нецелесообразно. Градиентный спуск по всем прямым оказался самым быстрым. Например,  $T(2, 32) = 0,00048$  с.,  $T(10, 1000) = 10,49$  с. Однако для небольших  $n$  и  $m$  он несколько проигрывает по сравнению с градиентным спуском по одной прямой. Это может говорить о том, что целесообразно сочетать спуск по одной и всем прямым. Вначале, находясь далеко от минимума целевой функции можно использовать градиентный спуск по одной прямой, а затем при замедлении скорости спуска переходить к спуску по всем прямым, проходящим через рассматриваемую узловую точку.

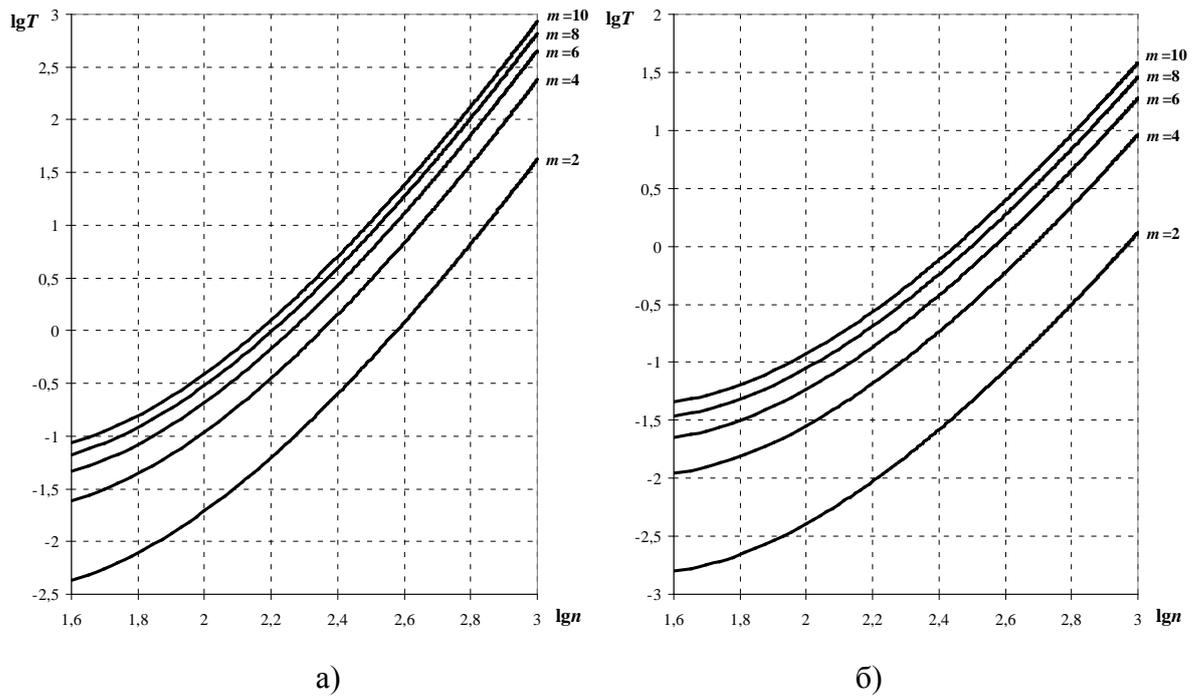


Рисунок 4.17 – Среднее время вычислений коэффициентов уравнений регрессии при покоординатном спуске: а) по одной прямой, б) по всем прямым

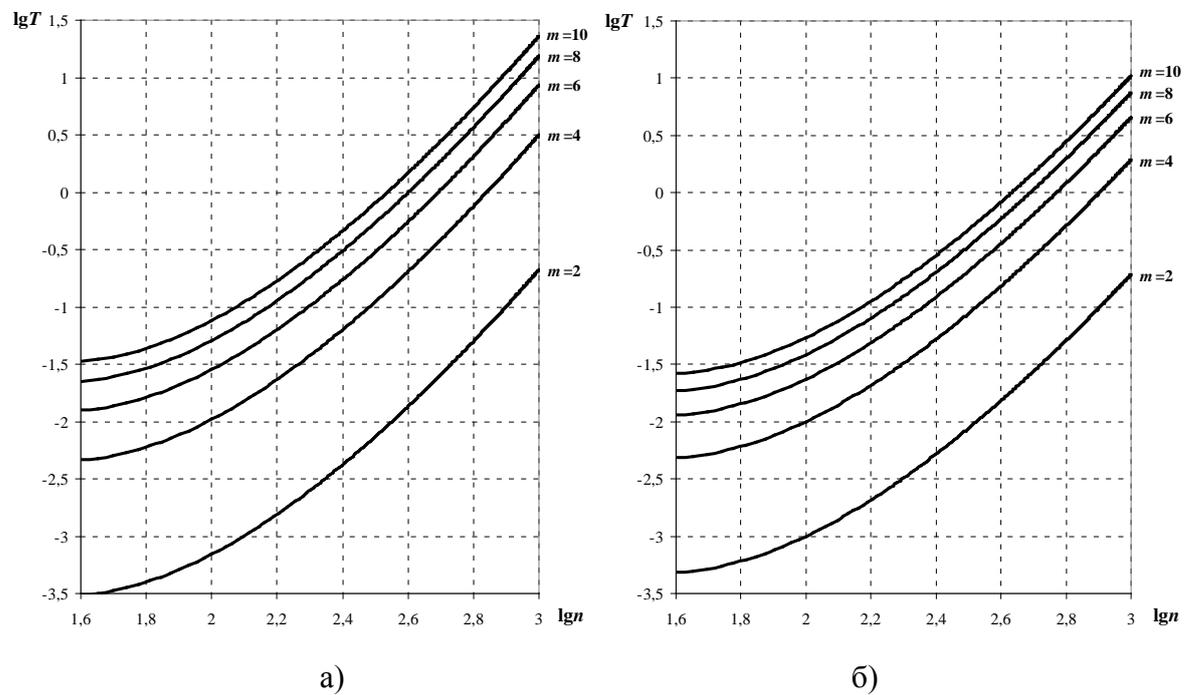


Рисунок 4.18 – Среднее время вычислений коэффициентов уравнений регрессии при градиентном спуске: а) по одной прямой, б) по всем прямым

На примере градиентного спуска по всем прямым рассмотрим влияние на время вычислений типа засоряющего распределения у вектора случайных погрешностей  $\varepsilon$ . Отклонения от постулируемого закона распределения опишем известной моделью Тьюки–Хьюбера, в которой исходная выборка «засоряется» малым числом выбросов

$$F_{\varepsilon}(x) = (1 - \gamma)F_0(x) + \gamma H(x),$$

где

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция распределения стандартного нормального закона,}$$

$H(x)$  – функция распределения засорений, имеющих вид выбросов, как по уровню, так и по дисперсии,

$\gamma$  – вероятность появления выброса.

Были рассмотрены четыре случая засорения  $H(x)$ : 1)  $H_1(x) = F_0(x)$ , т.е. засорения нет; 2)  $H_1(x)$  – нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 2, и стандартным отклонением 3; 3)  $H_2(x)$  – распределение Коши с нулевым параметром сдвига; 4)  $H_3(x)$  – одностороннее распределение Коши. Для определенности зададим  $\gamma = 0,1$ .

Для каждого случая, а также по всем четырем случаям вместе построены линейные регрессионные зависимости времени вычислений  $\ln T = b_1 \ln n + b_2 \ln(\ln m) + b_3 \ln(\ln n)$ . В таблице 4.9 приведены коэффициенты  $b_k$ , их доверительные интервалы  $\Delta b_k$  и коэффициенты детерминации  $R^2$ . Отметим, что все уравнения и их коэффициенты оказались статистически значимыми. Доля пересечения доверительных интервалов оказалась более 67%.

Таблица 4.9 – Числовые характеристики регрессионных уравнений

Случай	$b_1$	$\Delta b_1$	$b_2$	$\Delta b_2$	$b_3$	$\Delta b_3$	$R^2$
1	6,16	(5,84; 6,47)	3,35	(3,00; 3,69)	-22,27	(-23,31; -21,23)	0,98
2	6,29	(5,96; 6,63)	3,42	(3,05; 3,78)	-22,74	(-23,84; -21,64)	0,98
3	6,26	(5,96; 6,57)	3,37	(3,04; 3,71)	-22,64	(-23,65; -21,63)	0,98
4	6,34	(6,02; 6,66)	3,38	(3,03; 3,73)	-22,87	(-23,92; -21,82)	0,98
1, 2, 3, 4	6,27	(5,97; 6,58)	3,33	(3,00; 3,66)	-22,64	(-23,65; -21,64)	0,98

Аналогичные результаты были получены и для остальных вариантов спуска по узловым прямым. Поэтому можно говорить о том, что наличие и тип засоряющего распределения не существенно влияет на время вычислений алгоритмов.

#### 4.5.5 Выводы

Рассмотрены различные варианты алгоритмов спуска по узловым прямым для реализации МНМ. Вычислительная сложность градиентного спуска по узловым прямым незначительно, всего в  $O(n^{0,4})$  уступает алгоритму МНК. Отметим, что вычислительную эффективность градиентного спуска потенциально можно еще повысить за счет сокращения числа рассматриваемых узловых прямых. Наряду со снижением вычислительных затрат, использование градиентного спуска устраняет возможность накопления вычислительных погрешностей при определении значений целевой функции для больших выборок. Кроме этого градиентный спуск достаточно просто реализуется. Это позволяет использовать МНМ как альтернативу МНК в различных практических приложениях.

#### 4.6 Заключение к разделу 4

Целью данного этапа являлась разработка методов мониторинга состояния сложных региональных систем на основе энтропийно-вероятностного моделирования.

В результате исследования в рамках данного этапа работ получены следующие новые научные результаты.

1) Предложено объединить многомерную модель риска и с энтропийной моделью. Полученная вероятностно-энтропийная модель, с одной стороны, учитывает многомерность и взаимосвязанность между собой элементов стохастической системы (факторов риска), а с другой, позволит учесть риск.

Таким образом, предлагается рассматривать многомерный риск как системную закономерность, что, безусловно, приведет к более глубокому пониманию проблемы рисков и их влияния на состояние систем критичных инфраструктур.

2) Разработана и апробирована методика включения в состав вероятностно-энтропийных моделей многомерного риска стохастических систем дискретных компонент. Данная методика позволяет расширить область применения энтропийного моделирования на случай, когда некоторые исследуемые показатели представлены в дискретной форме в результате группирования или перехода к балльным величинам.

3) Удалось расширить область применения модели многомерного риска для некоторых негауссовых систем.

4) Разработан вычислительно эффективный алгоритм линейного регрессионного моделирования многомерных динамических процессов на основе метода наименьших модулей. Данный алгоритм позволит реализовывать энтропийное моделирование по динамической информации.

## **5 Создание смазочных композиций, обеспечивающих надежную работу узлов трения машин и механизмов в условиях пониженных температур**

### **5.1. Введение**

Современные тенденции развития энергетического машиностроения, в частности двигателестроения, характеризуются повышением удельной мощности и моторесурса поршневых и комбинированных двигателей внутреннего сгорания (ДВС) при одновременном снижении расхода топлива, материалоемкости и выбросов вредных веществ с отработавшими газами. Решение проблемы повышения моторесурса ДВС непосредственно связано со снижением потерь энергии на преодоление трения в элементах систем, механизмов и сложнагруженных трибосопряжений.

Стремление современных инженеров и конструкторов к созданию энергоэффективных установок различного назначения привело к разработке новых конструкционных и смазочных материалов, обладающих улучшенными трибологическими свойствами. Перспективными являются различного рода моторные масла с высокими противоизносными свойствами, обеспечивающие работоспособность в экстремальных условиях (при повышенных нагрузках, скоростях и температурах) и позволяющие снизить потери мощности на трение и теплонапряженность в ТС. Многие из этих моторных масел, представляющих собой смесь базовых компонентов и пакета присадок различного назначения [1].

В рамках НИР проведены тестовые расчёты подшипниковых узлов турбокомпрессора ДВС в температурном диапазоне от +100°C до -15°C. Для математического моделирования вязкости смазочного материала (моторного масла) были использованы справочные данные из открытых источников. Был синтезирован ряд противоизносных компонентов на основе олеатов металлов – олеат меди, олеат олова и олеат цинка, выполнены предварительные трибологические исследования смазочных композиций компонентов с индустриальным маслом И-40А, а также с моторным маслом класса вязкости SAE 5W-40. Также синтезирована противоизносная композиция ЭДТУК содержащая сложные эфиры этилендиаминтетрауксусной кислоты с одним или несколькими одноатомными спиртами, содержащими 7 и более атомов углерода. В ряде случаев данная присадка превосходит по эффективности диалкилдитиофосфаты цинка и триарилфосфоротионаты, которые традиционно применяются в качестве противоизносных добавок.

## 5.2. Исследование подшипника при смазке индустриальным маслом И-40А

В работе был синтезирован ряд противоизносных компонентов на основе олеатов металлов – олеат меди, олеат олова и олеат цинка, и проведены их трибологические исследования, в том числе, в разработанном модельном ПС.

Олеаты некоторых металлов входят в состав многих смазочных композиций и позволяют значительно снизить коэффициент трения и износ деталей машин. Например, олеат меди наиболее широко используется в качестве компонента так называемых металлизированных присадок к смазочным материалам, является основой известных добавок, таких как валена, серовит [2, 3] и другие.

Диаграммы Герси-Штрибека для модельного подшипника при смазке индустриальным маслом И-40А без присадок, а также смазочными композициями из масла И-40А с добавлением синтезированных олеатов металлов представлены на рисунках 5.1–5.3.

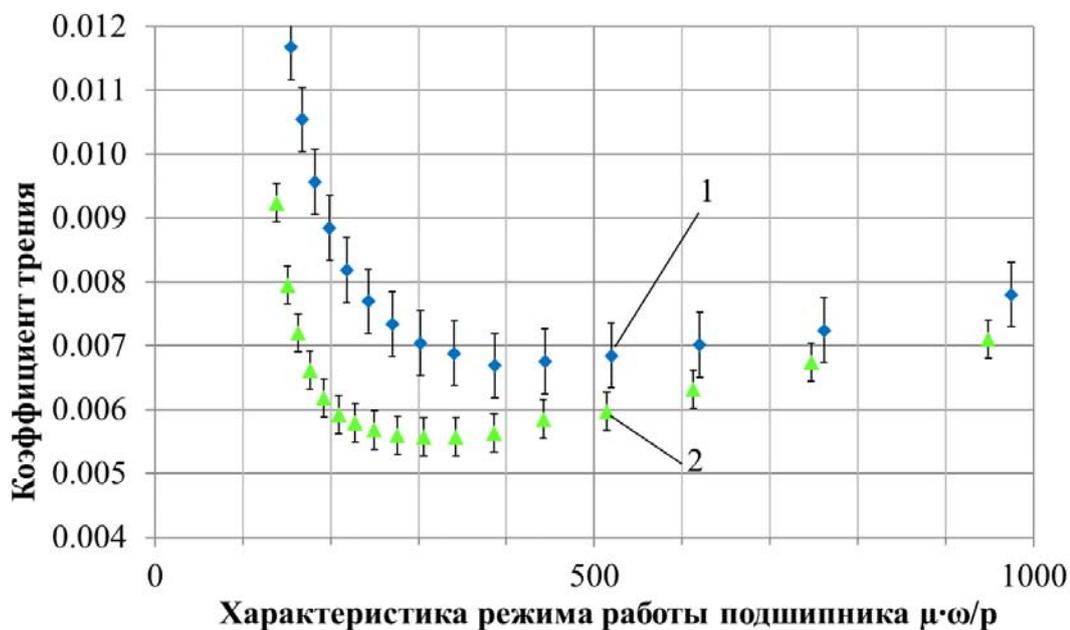


Рисунок 5.1 – Диаграмма Герси-Штрибека при смазке подшипника чистым маслом И-40А (1) и маслом И-40А с добавлением олеата меди (2)

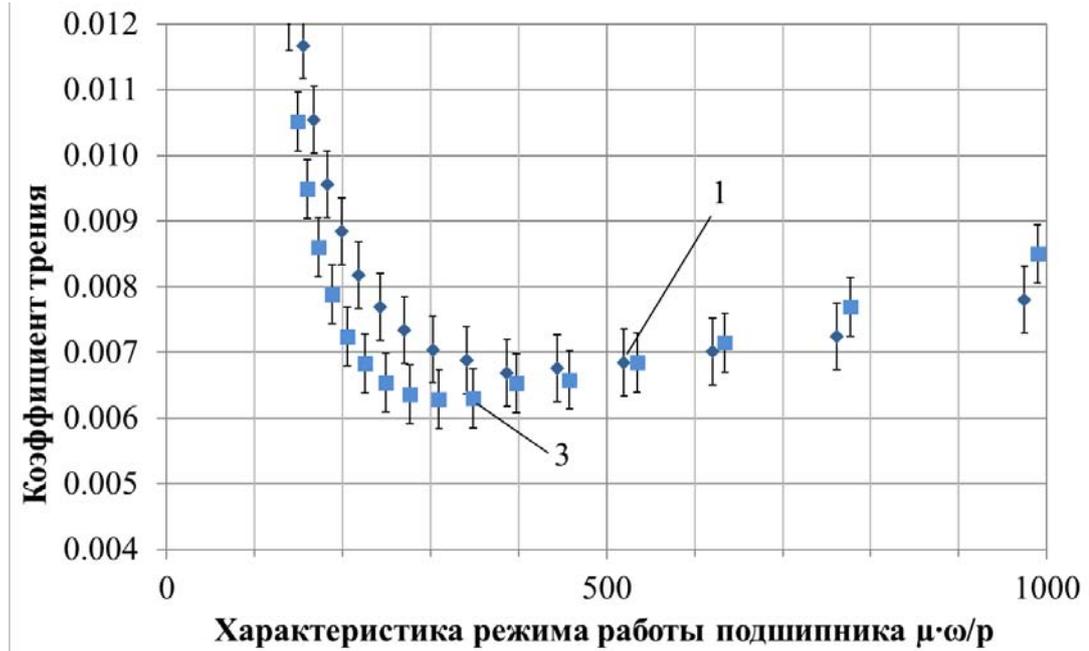


Рисунок 5.2 – Диаграмма Герси-Штрибека при смазке подшипника чистым маслом И-40А (1) и маслом И-40А с добавлением олеата цинка (3)

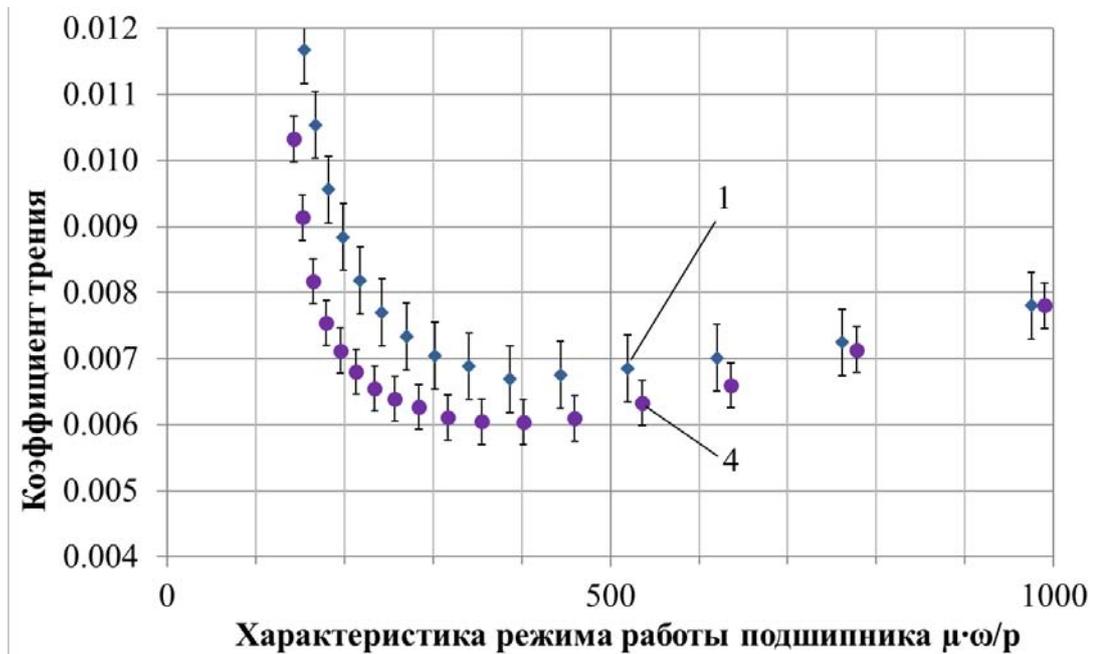


Рисунок 5.3 – Диаграмма Герси-Штрибека при смазке подшипника чистым маслом И-40А (1) и маслом И-40А с добавлением олеата олова (4)

Было обнаружено, что работе подшипника на масле с добавлением олеатов меди, цинка и олова изменяется характер кривой Герси-Штрибека в области перехода между гидродинамическим и граничным режимом смазки. А именно, при работе подшипника на чистом масле И-40А минимальный коэффициент трения 0,0062...0,0073 достигается при  $\lambda'_{кр}$  в районе 390...400, а при дальнейшем снижении до 150 происходит резкий рост коэффициента трения и переход к граничному режиму смазки. При добавлении в масло И-40А олеата меди минимальный коэффициент трения 0,0055...0,0059 достигается в диапазоне  $\lambda'_{кр} = 250...350$ . То есть существенно расширяется область перехода между жидкостным и граничным режимами смазки. При этом происходит снижение на 30% коэффициента трения при устойчивой граничной смазке.

Аналогичный результат наблюдается для смазочных композиций индустриального масла И-40А и моторного масла класса SAE 5W-40 с олеатами цинка и олова. Коэффициент трения при граничной смазке уменьшается на 10–20%.

Испытания синтезированных олеатов меди, цинка и олова на четырёхшариковой машине трения по ГОСТ 9490-76 свидетельствуют о том, что показатель износа снижается на 19–30% (рисунки 5.4, 5.5). Этот результат существенно дополняет результаты измерений диаграммы Герси-Штрибека на натурном образце подшипника скольжения и устанавливает для рассматриваемых композиций однозначную взаимосвязь между износом и коэффициентом трения. Однако наш опыт экспериментальной работы показал, что такая взаимосвязь характерна не для всех углеводородных жидких смазочных масел и их композиций с присадками.

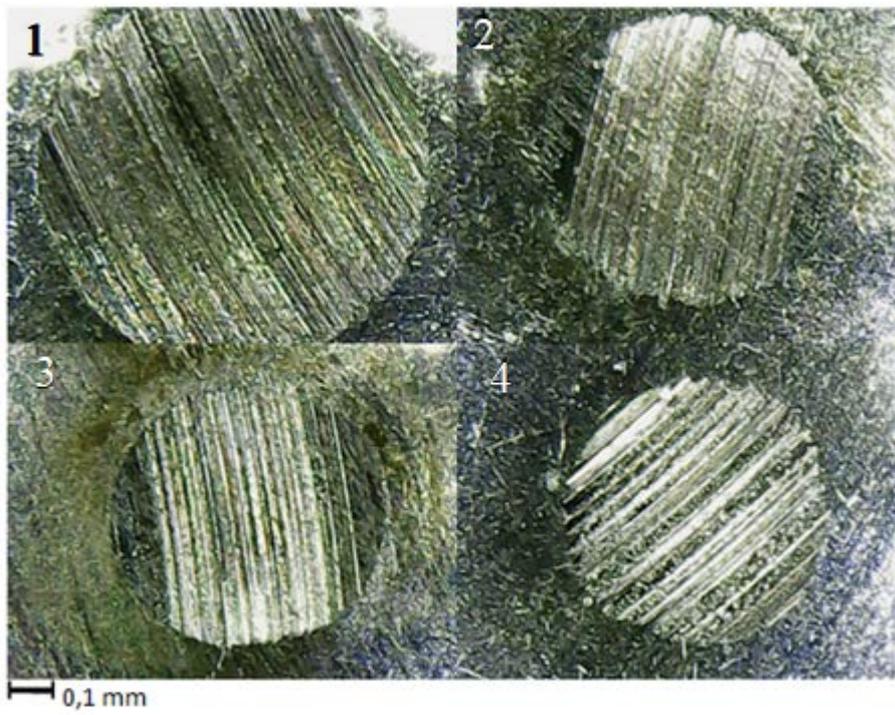
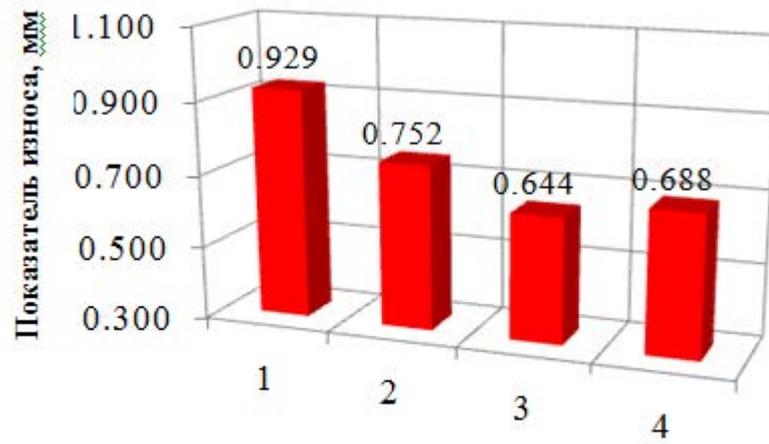


Рисунок 5.4 – Изменение показателя износа масла И-40А при добавлении олеатов меди (2), олова (3) и цинка (4)

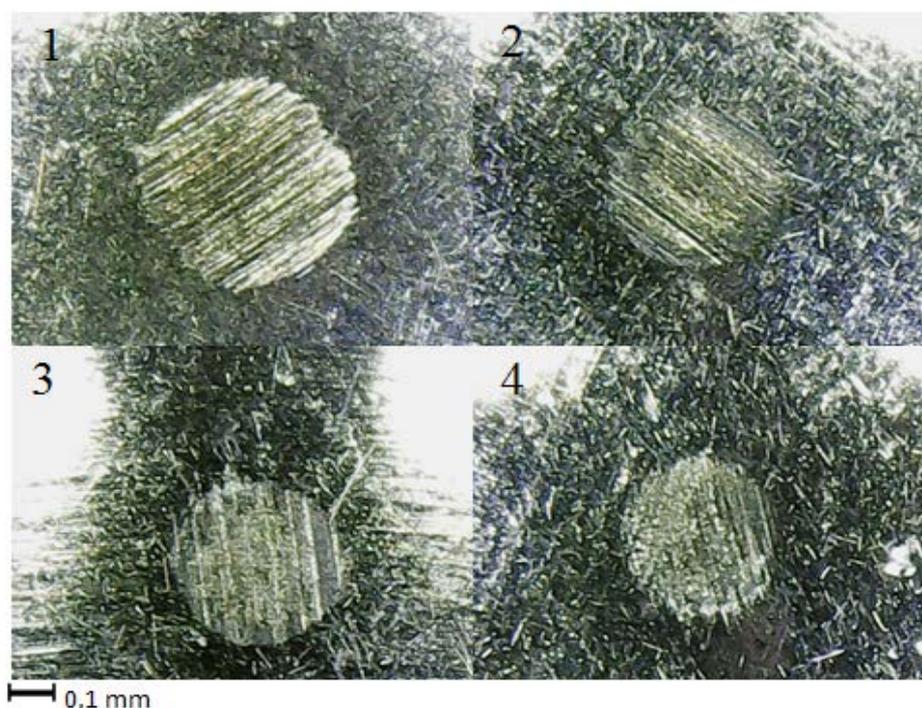
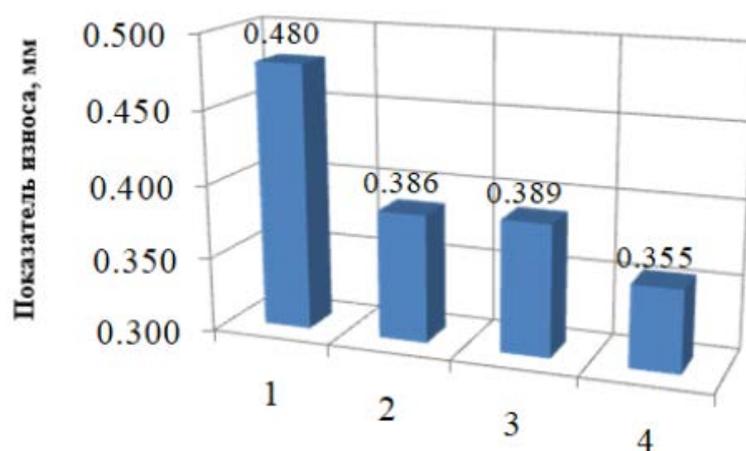


Рисунок 5.5 – Изменение показателя износа моторного масла класс вязкости SAE 5W-40 при добавлении олеатов меди (2), олова (3) и цинка (4)

### 5.3. Исследование подшипника при смазке гидравлическим маслом ВМГЗ-45

Рассмотрим поведение модельного подшипника скольжения при смазке гидравлическим маслом ВМГЗ-45 и с добавлением противоизносной композиции ЭДТУК. В соответствии с паспортом безопасности это масло имеет в своем составе бутилоктилдитиофосфат цинка (противоизносная присадка), полиалкилметакрилат (загущающая присадка, модификатор вязкости), который придает маслу, в том числе и противоизносные свойства. ВМГЗ-45 имеет динамическую вязкость при 100 °С более чем

в три раза меньше вязкости масла SAE 5W-40, и более чем в два раза меньше вязкости масла класса SAE 0W-20.

Противоизносная композиция ЭДТУК содержит сложные эфиры этилендиаминтетрауксусной кислоты с одним или несколькими одноатомными спиртами, содержащими 7 и более атомов углерода. В ряде случаев данная присадка превосходит по эффективности диалкилдитиофосфаты цинка и триарилфосфоротионаты, которые традиционно применяются в качестве противоизносных добавок. Данный эффект авторы композиции объясняют оптимальным сочетанием адсорбционной активности углеводородных радикалов, удерживающих молекулы базового масла на поверхности адсорбированного слоя эфира.

Диаграммы Герси-Штрибека для модельного подшипника, смазываемого гидравлическим маслом ВМГЗ-45 без добавок и с ЭДТУК (в объёме 1,5%) представлены на рисунке 5.5. Параметры шероховатости вала и вкладыша были измерены после проведения эксперимента. Относительный зазор для испытываемой пары «ролик-вкладыш» составил  $\psi = 2,29 \cdot 10^{-3}$ .

Дополнительно была выполнена оценка линейной интегральной интенсивности изнашивания  $I_h$  подшипника методом искусственных баз. Для этого до эксперимента на поверхность вкладыша были нанесены 15 меток твердомером Роквелла, а диаметр каждой метки измерили в шести направлениях.

С учётом параметров конуса (угол при вершине 60 градусов) твердомера Роквелла глубина метки  $h$  в зависимости от диаметра  $d$  определяется как  $h = d \cdot 0,288675$ . Эта формула позволяет легко определить толщину изношенного слоя, зная разность между начальным и конечным диаметром соответствующей метки до и после испытания.

Результаты измерения линейной интегральной интенсивности изнашивания в диапазоне  $\lambda' = 37,5 \dots 40$  нанесены на диаграмму Герси-Штрибека (рисунок 5.6).

Результаты свидетельствуют о том, что добавление противоизносной композиции ЭДТУК существенно влияет на смену видов смазки в подшипнике. При смазке маслом ВМГЗ-45 без добавки резкий рост коэффициента трения, свидетельствующий о начале граничного режима смазки и перекрытия микронеровностей при значениях  $\lambda'_{кр}$  менее 60. Добавление 1,5% ЭДТУК меняет картину. Рост коэффициента трения также начинается при характеристике  $\lambda'_{кр}$  менее 60, однако, он менее интенсивный. При характеристике режима  $\lambda'_{кр} = 40$  коэффициент трения немногим отличается от минимального, характерного для жидкостного режима смазки. Этот эффект обусловлен изменением структуры адсорбирующихся граничных слоёв, увеличением длины углеводородных

радикалов. Повышение коэффициента трения в диапазоне характеристик  $\lambda'$  от 40 до 60 обусловлено взаимодействием поверхностей через адсорбционные граничные слои с повышенной вязкостью при полном разделении поверхностей трения. Линейная интегральная интенсивность изнашивания, как видно, отличается более чем на 80%.

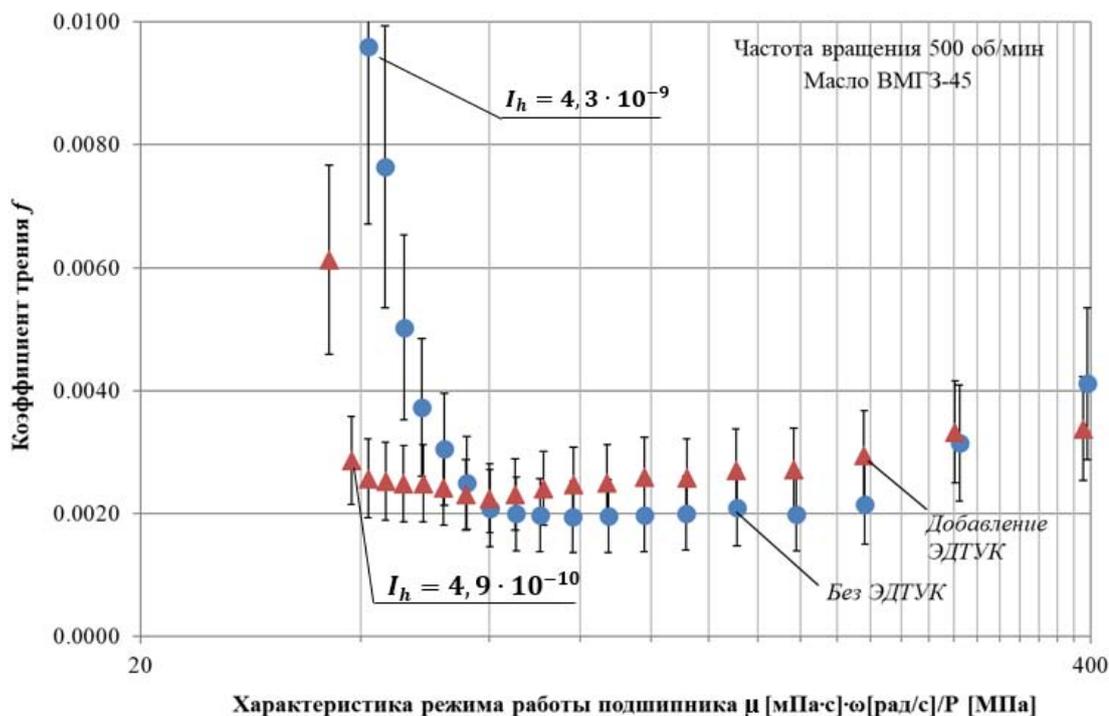


Рисунок 5.6 – Диаграмма Герси-Штрибека для испытываемого подшипника при смазке маслом ВМГЗ-45 без ЭДТУК и с добавлением 1,5% ЭДТУК

В тоже время при смазке маслом ВМГЗ-45 без добавки ЭДТУК при характеристике режима  $\lambda' = 40$  коэффициент трения увеличивается в пять раз.

Отчётливо разница между чистым маслом и маслом с добавкой показана на рисунке 5.7 в виде зависимости коэффициента трения от удельной нагрузки на подшипник.

Из рисунка видно, что существует область удельных нагрузок от 1 до 3,2 МПа, в которой коэффициент трения меняется незначительно, оставаясь практически постоянным. При этом после добавления в масло присадки ЭДТУК эта область расширяется до 4,8 МПа.

Исследования масла ВМГЗ-45 без присадки и в композиции с ЭДТУК на четырёхшариковой машине трения показали, что противоизносная композиция увеличивает нагрузку сваривания на 20% (со 126 кгс до 160 кгс) по сравнению с базовым

маслом ВМГЗ-45. Другими словами, противоизносная композиция ЭДТУК увеличивает предельную нагрузочную способность базового масла ВМГЗ-45 на 20%.

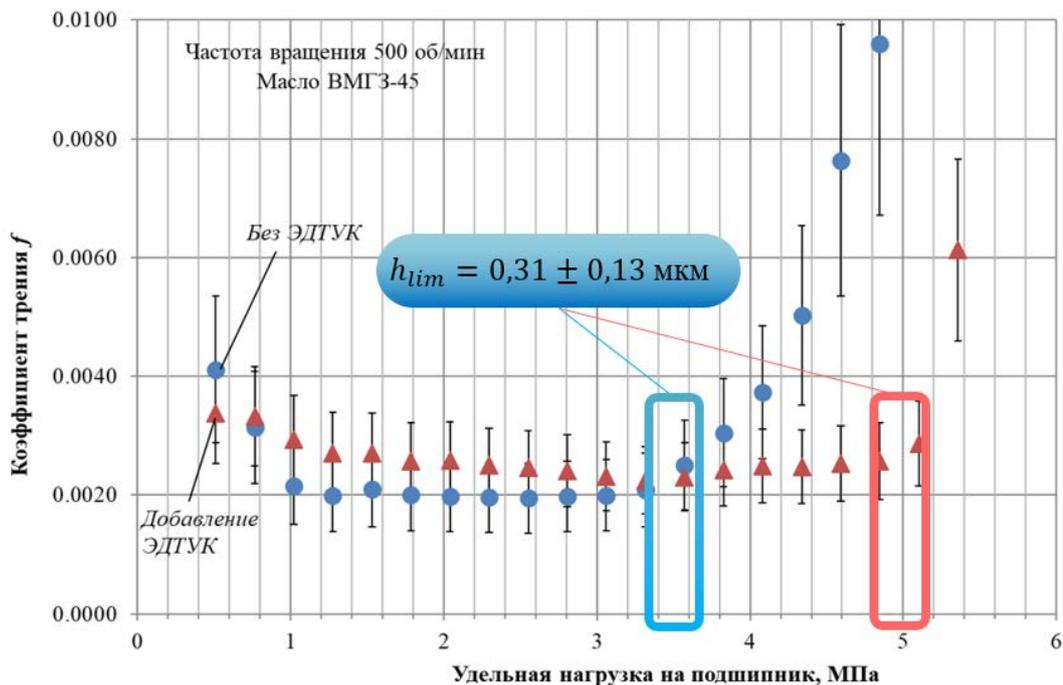


Рисунок 5.7 – Зависимость коэффициента трения от удельной нагрузки на подшипник

Показатель износа по ГОСТ 9490-76 масла ВМГЗ-45 и исследуемой композиции с ЭДТУК составил 0,626 мм и 0,424 мм, соответственно. Линейная интегральная интенсивность изнашивания при таком показателе износа составляет  $6,9 \cdot 10^{-9}$  для исходного масла ВМГЗ-45 и  $3,72 \cdot 10^{-9}$  для композиции с ЭДТУК.

Различие в интенсивности изнашивания составляет 50%. Этот результат хорошо коррелирует с измерениями интенсивности изнашивания на натурном образце подшипника скольжения.

Аналогичные исследования были проведены и с рядом других противоизносных компонентов – диоктилдитиофосфатом цинка, содержащем радикалы C8 и дигексадецилдитиофосфатом цинка, содержащем радикалы C16. Синтезированные присадки растворяли в индустриальном масле И-20А (класс вязкости SAE 30) в концентрации 2% массовых.

Результаты показали, что при введении в масло И-20А 2% мас. диоктилдитиофосфата цинка, контактное давление, при котором происходит переход в граничный режим смазки, возрастает с 28 МПа до 38 МПа, а при введении в масло И-20А 2% мас. дигексадецилдитиофосфата цинка – до 48 МПа. Антифрикционные свойства

присадки, содержащей более длинные углеводородные радикалы, также существенно выше.

#### 5.4. Заключение к разделу 5

Синтезирован ряд противоизносных компонентов на основе олеатов металлов – олеат меди, олеат олова и олеат цинка, и проведены их трибологические исследования. Применение разработанных противоизносных компонентов существенно сужает зону граничного трения, то есть расширяется область перехода между жидкостным и граничным режимами смазки.

Испытания синтезированных олеатов меди, цинка и олова на четырёхшариковой машине трения по ГОСТ 9490-76 свидетельствуют о том, что показатель износа снижается на 19–30%.

В дальнейшем НИР предполагает проведение исследований реологических свойств разработанных композиций при низких температурах с помощью ротационного вискозиметра.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные задачи для выполнения НИР в отчетный период выполнены в полном объеме, планируемые результаты достигнуты и отражены в разделах данного отчета.

Для реализации концепции антихрупкости объектов второй природы, исследуемой в разделе 1, необходимо провести дополнительное исследование в тех областях современной инженерии, где возможно получение обширной статистики, непрерывно пополняемой с течением времени. Без наличия или недостаточности такой статистики, теория антихрупкости останется практически неприменимой для киберфизических объектов или будет содержать большие неопределенности, обесценивающие полученные результаты.

Исследование подходов идентификации редких событий с точностью, приемлемой для практического применения, позволило выделить в предпочтительный – модифицированный кросс-энтропийный метод из класса преобразований функций распределения.

На основе энтропийно-вероятностного моделирования получена модель, которая с одной стороны, учитывает многомерность и взаимосвязанность между собой элементов стохастической системы (факторов риска), а с другой, позволяет учесть риск. Таким образом, предлагается рассматривать многомерный риск как системную закономерность, что, безусловно, приведет к более глубокому пониманию проблемы рисков и их влияния на состояние систем критических инфраструктур.

Полученные результаты являются существенным вкладом в базу фундаментальных и прикладных знаний зонтичной науки инфранетики и МИБИКС-конвергентных технологий. Эти результаты позволяют ускорить создание программного комплекса управления супраживучестью био-социо-киберфизических систем с учетом локальных, региональных и планетарных граничных условий по обобщенным гармонизирующим критериям, которые отражают принципы и цели управления государством, зафиксированных в Основном Законе страны.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### К разделу 1:

1. Timashev S.A. Black-swan type catastrophes and antifragility/supra-resilience of urban socio-technical infrastructures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 972, No. 012001.
2. Тимашев С.А. Инфраструктуры. В 3 частях. Т. II. Диагностика. Мониторинг. Мейнтенанс. Человеческий фактор. Живучесть. – Екатеринбург: УрО РАН, 2020. – 696 с.
3. Талеб Н.Н. Антихрупкость. Как извлечь выгоду из хаоса. – ООО «Изд. группа «Азбука-Аттикус», 2015. – 762 с.
4. Taleb N.N. Silent Risk: Lectures on Fat Tails, (Anti)Fragility, and Asymmetric Exposures // SSRN Electronic Journal. – 2014. – DOI: 10.2139/ssrn.2392310.
5. Taleb N.N. Douady R. Mathematical Definition, Mapping, and Detection of (Anti) Fragility // Quantitative Finance. – 2013. – Vol. 13, No 11. – P. 1677-1689.
6. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk // J. Econometrica. – 1979. – Vol. 47. – P. 263-291.
7. Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Phys. Rev. E – 2002. – Vol. 66(5 Pt 2), No. 056125.
8. Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B – 2009. – Vol. 70. – P. 3-13.
9. Kaniadakis, G., Scarfone, A. M., Sparavigna, A. & Wada, T. Composition law of kappa-entropy for statistically independent systems // Phys. Rev. E. – 2017. – Vol. 95, No. 052112.
10. Беврани Х., Аничкин К. Оценка параметров распределений с тяжелыми хвостами с помощью эмпирического распределения // Математика. Компьютер. Образование: Сб. тр. XII Междунар. конф. / под общей ред. Г.Ю. Ризниченко – Ижевск: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – Т. 2. – 466 с. – С. 493-501.
11. Папков Б.В., Куликов А.Л., Осокин В.Л. Оценка вероятностей и риска редких событий в электроэнергетике // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики: Материалы 90-го заседания Междунар. науч. семинара им. Ю.Н. Руденко. В 2-х кн. / отв. ред. Н.И. Воропай. – Иркутск: Изд-во ИСЭ СО РАН, 2018. – С. 257-266.
12. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Салов С.С. и др. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. – М.: Наука, 2000. – 431 с.

13. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с. – С. 30-31.
14. Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 173 с.
15. Косорукова И.В., Бондарева Н.А., Жданова О.А. и др. Корпоративные финансы: учебник для бакалавров. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2020. – 616 с.
16. Гришина Н.П. Поведенческий подход к проблеме выбора оптимального портфеля. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. – 120 с.
17. Kennie H.J. Engineering Antifragile Systems: A Change In Design Philosophy // Procedia Computer Science. – 2014. – Vol. 32. – P. 870-875.
18. Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. A model of personal income distribution with application to Italian data // Empirical Econ. – 2011. – Vol. 39. – P. 559-591.
19. Pobočíková I., Sedláčková Z., Šimon J., Jurášová D. Statistical analysis of the wind speed at mountain site Chopok, Slovakia, using Weibull distribution // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 776, No. 012114.

## **К разделу 2:**

1. Надежность систем энергетики и их оборудования. Спр. в 4 т. / Под общей ред. Ю.Н. Руденко. Т.2. Надежность электроэнергетических систем. Справочник / Под ред. М.Н. Розанова. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 568 с.
2. Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Надежность и резервирование в энергосистемах. – Новосибирск: Наука, 1974.
3. Обоскалов В.П. Надежность обеспечения баланса мощности электроэнергетических систем. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002.
4. Воропай Н.И. Надежность систем энергетики. (Сборник рекомендуемых терминов). – М.: ИАЦ «Энергия», 2007. – 192 с.
5. Чукреев Ю.Я. Сравнение отечественных и зарубежных вероятностных показателей балансовой надежности электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. – 2012. – №6. – С. 27-37.
6. Биллингтон Р., Аллан Р. Оценка надежности электроэнергетических систем; перевод с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
7. Методические указания по проведению расчетов балансовой надежности: СТО 59012820.27.010.005-2018. – М.: АО «СО ЕЭС», 2018. – 25 с.

8. Приказ Министерства энергетики РФ от 6 апреля 2009 г. N 99 «Об утверждении Порядка определения зон свободного перетока электрической энергии (мощности)» [Электронный ресурс]. – 2016. – URL: <https://base.garant.ru/195834/> (дата обращения: 01.12.2021).
9. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1968. – 64 с.
10. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. – John Wiley & Sons, Inc.: New Jersey, 2011.
11. Чукреев Ю.Я. Модели обеспечения надежности электроэнергетических систем. – Сыктывкар: Изд. Коми НЦ УрО РАН, 1995.
12. Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М. Надежность систем электроэнергетики. – Новосибирск: Сибирская изд. фирма «Наука» Академиздатцентра «Наука», 2015.
13. Billinton R., Wenyan L. Reliability assessment of electric power systems using Monte Carlo methods; 1st ed. – Springer: New York, 1994.
14. Обоскалов В.П., Валиев Р.Т. Риск превышения пропускной способности межсистемных связей в задаче балансовой надежности ЭЭС // Изв. РАН. Энергетика. – 2018. – №5. – С. 3-14.
15. Чукреев Ю.Я., Полуботко Д.В., Чукреев М.Ю. Применение современных средств параллельных вычислений в информационной системе оценки показателей балансовой надежности электроэнергетических систем // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 63. – Баку: АзНИиПИИЭ. – 2013. – С. 422-432.
16. Giuntoli M., Pelacchi P., Poli D. Parallel computing of sequential MonteCarlo techniques for reliable operation of Smart Grids // Proc. of IEEE EUROCON 2015. – Spain, September 8-11, 2015. – DOI: 10.1109/EUROCON.2015.7313707.
17. Martinez J.A., Guerra G. A parallel Monte Carlo method for optimum allocation of distributed generation // IEEE Trans. Power Syst. – 2014. – 29. – P. 2926-2933.
18. Leite da Silva A.M., de Resende L.C., da Fonseca Manso L.A., Miranda V. Composite reliability assessment based on Monte Carlo simulation and artificial neural networks // IEEE Trans. Power Syst. – 2007. – DOI: 10.1109/TPWRS.2007.901302.
19. Singh C., Wang L. Role of artificial intelligence in the reliability evaluation of electric power systems // Turkish J. Electr. Eng. Comput. Sci. – 2008.
20. Pindoriya N.M., Jirutitjaroen P., Srinivasan D., Singh C. Composite reliability evaluation using Monte Carlo simulation and least squares support vector classifier // IEEE Trans. Power Syst. – 2011. DOI: 10.1109/TPWRS.2011.2116048.

21. Kalinina A., Spada M., Vetsch D.F., Marelli S., Whealton C., Burgherr P., Sudret B. Metamodeling for Uncertainty Quantification of a Flood Wave Model for Concrete Dam Breaks. – URL: mdpi.com. – DOI: 10.3390/en13143685.
22. Hua B., Bie Z., Au S.K., Li W., Wang X. Extracting rare failure events in composite system reliability evaluation via subset simulation // IEEE Trans. Power Syst. – 2015. – 30. – P. 753-762. – DOI: 10.1109/TPWRS.2014.2327753.
23. Biondini G. An introduction to rare event simulation and importance sampling. Big data analytics. Handbook of statistics. Vol. 33. – Elsevier, 2015. – P. 29-68.222422.
24. Wang Y., Guo C., Wu Q., Dong S. Adaptive sequential importance sampling technique for short-term composite power system adequacy evaluation // IET Gener. Transm. Distrib. – 2014. – 8. – P. 730-741. – DOI: 10.1049/iet-gtd.2013.0279.
25. Papaioannou I., Papadimitriou C., Straub D. Sequential importance sampling for structural reliability analysis // Struct. Saf. – 2016. – 62. – P. 66-75. – DOI: 10.1016/j.strusafe.2016.06.002.
26. de Boer P.T., Kroese D.P., Mannor S., Rubinstein R.Y. A tutorial on the cross-entropy method // Ann Oper Res. – 2005. – 134(1):19–67.
27. Yang D.Y., Teng J., Frangopol D.M. Cross-entropy-based adaptive importance sampling for time-dependent reliability analysis of deteriorating structures // Struct. Saf. – 2017. – 66:38–50.
28. Kroese D.P., Rubinstein R.Y., Glynn P.W. Chapter 2 – The cross-entropy method for estimation. Handbook of statistics: machine learning: theory and applications. Handbook of Statistics. – Elsevier, 2013. – Vol. 31.– P. 19-34.
29. Обоскалов В.П., Кокин С.Е., Кирпикова И.Л. Примененик вероятностно-статистических методов и теории графов в электроэнергетике / Уч. пособие – Екатеринбург: УрФУ, 2016. – 271 с.

### **К разделу 3:**

1. Федеральный закон РФ от 08 января 1998 г. № 10-ФЗ «О государственном регулировании развития авиации» с изменениями от 15 октября 2020 г. № 111-ФЗ.
2. Википедия. Свободная энциклопедия. – URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/100\\_крупнейших\\_авиационных\\_катастроф](https://ru.wikipedia.org/wiki/100_крупнейших_авиационных_катастроф) 100 крупнейших авиационных катастроф (дата обращения 06.11.2020).
3. Cozzani V. Cascading events triggering industrial accidents: quantitative assessment of NaTech and Domino scenarios. – 2015. – 204 p.

4. Уголок неба. Большая авиационная энциклопедия. – URL: <http://www.airwar.ru/index.html> Каталог (дата обращения 16.11.2020).
5. Aviado.ru. – URL: <https://aviado.ru/guide/planes/airbus/airbus-a300/> История AirbusA300 (дата обращения 06.02.2021).
6. Testpilots. Испытатели. – URL: [https://testpilot.ru/usa/lockheed/c/5/c5\\_1.htm](https://testpilot.ru/usa/lockheed/c/5/c5_1.htm) C-5A «Galaxy» стратегический военно-транспортный самолет (дата обращения 16.02.2021).
7. Avia.pro. – URL: <http://avia.pro/blog/lockheed-l-188-electra-tehnicheskie-harakteristiki-foto> LockheedL-188Electra. Технические характеристики. Фото (дата обращения 12.02.2021).
8. 1001crash.com. Lessons learnt for aviation safety. – URL: <https://www.1001crash.com/index-page-statistique-lg-2.html> Statistics analysis of airplane accidents (дата обращения 16.01.2021).
9. Википедия. Свободная энциклопедия. – URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Конкуренция\\_между\\_Airbus\\_и\\_Boeing](https://ru.wikipedia.org/wiki/Конкуренция_между_Airbus_и_Boeing) Конкуренция между Airbus и Boeing (дата обращения 16.03.2020).
10. МК.ru. – URL: <http://www.mk.ru/social/article/2013/11/19/947406-kakov-srok-godnosti-samolyotov-na-zapade.html> Каков «срок годности» самолетов на Западе? (дата обращения 16.02.2021).
11. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – 2017. – URL: <http://www.nsc.ru/interval> (дата обращения 02.12.2020).
12. Р 50.1.060-2006 Статистические методы. Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценке неопределенности измерений. – М.: Стандартиформ, 2006. – 28 с.
13. Moore R.E. Introduction to interval analysis / Ramon E. Moore, R. Baker Kearfott, Michael J. Cloud. – Philadelphia: SIAM, 2009. – 224 p.
14. Zio E. Methods for representing uncertainty: a literature review / Enrico Zio, Nicola Pedroni. – 2015. – URL <http://www.FonCSI.org> (дата обращения 20.03.2021).
15. Uncertainty in industrial practice: a guide to quantitative uncertainty management / ed. by E. de Rocquigny, N. Devictor, S. Tarantola. – John Wiley & Sons, 2008. – 366 p.
16. РБ Г-05-039-96 «Руководство по анализу опасности аварийных взрывов и определению параметров их механического воздействия».
17. Семенов К.К. Достоверность результатов применения метода Монте-Карло в задачах интервального анализа / К. К. Семенов // Вычислительные технологии. – 2016. – Том 21. – № 2. – С. 42-52.

18. Arunraj N.S. Modeling uncertainty in risk assessment: An integrated approach with fuzzy set theory and Monte Carlo simulation / N. S. Arunraj , Saptarshi Mandal, J. Maiti // Accident Analysis and Prevention. – 2013. – Vol. 55. – Pp. 242-255.
19. Фокин В.Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Самара: Типография СГТУ, 2010. – 131 с.
20. СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\*» (дата обращения 11.02.2021).
21. Газовик. Нефть. Резервуары и технологическое оборудование. – URL: <https://gazovik-neft.ru/catalogue/04> Изготовление резервуаров вертикальных РВС (дата обращения 10.02.2021).
22. ГОСТ 1510-84 Нефть и нефтепродукты. Маркировка, упаковка, транспортирование и хранение (с изменениями №1–5) (дата обращения 08.03.2021).
23. СП 155.13130.2014 Склады нефти и нефтепродуктов. Требования пожарной безопасности (дата обращения 21.01.2021).
24. Александров А.А. Оценка экологической опасности «большого дыхания» резервуара автозаправочных станций и нефтебаз // Вестник ОГУ. – 2005. – № 4. – С. 104-107.
25. Приказ Ростехнадзора РФ от 11 апреля 2016 г. № 144 "Об утверждении Руководства по безопасности «Методические основы по проведению анализа опасностей и оценки риска аварий на опасных производственных объектах».
26. Bernechea E., Arnaldos J. Design Optimization of Storage Facilities Taking Into Account the Domino Effect: AIChE Spring Meeting and Global Congress on Process Safety. – SanAntonio, Texas, USA, 2012.
27. Методика определения расчетных величин пожарного риска на производственных объектах: утв. МЧС России 10 июля 2009 г. (в редакции приказа МЧС России от 14 декабря 2010 г. № 649 «О внесении изменений в приказ МЧС России от 10.07.2009 № 404»). – URL <https://www.base.garant.ru/196118> (дата обращения 16.10.2020).
28. Каталог ГОСТ. – URL: <http://www.internet-law.ru/stroyka/doc/49262/> Руководство по оценке пожарного риска для промышленных предприятий (дата обращения 15.11.2020).
29. ПК TOXI+Risk 4.3.0: URL: [www.safety.ru](http://www.safety.ru).

#### К разделу 4:

1. Наше общее будущее. Доклад Всемирной комиссии по вопросам окружающей среды и развития: пер. с англ. – Генеральная Ассамблея ООН. – 1987. – URL: <https://www.un.org/ru/ga/pdf/brundtland.pdf> (дата обращения: 12.09.2021).
2. Бегун Т.В. Устойчивое развитие: определение, концепция и факторы в контексте моногородов // Экономика, управление, финансы: материалы II Межд. науч. конф. Пермь: Меркурий. – 2012. – С. 158-163. – URL: <http://moluch.ru/conf/econ/archive/57/3117/> (дата обращения: 10.02.2021).
3. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.
4. Barbier E. The Concept of Sustainable Economic Development // *Environmental Conservation*. – 1987. – Vol. 14. – No 2. – Pp. 101-110.
5. Costanza R., Daly H.E. Natural Capital and Sustainable Development // *Conservation Biology*. – 1992. – Vol. 6. – No. 1. – Pp. 37-46.
6. Логунцев Е.Н. Концепция устойчивого развития с позиций междисциплинарного подхода // *Городское управление*. – 2000. – № 11. – С. 24-32.
7. Гранберг А.Г., Данилов-Данильян В.И. Стратегия и проблемы устойчивого развития России в XXI веке. – М.: Экономика, 2002.
8. Dyllick T., Hockerts K. Beyond the Business Case for Corporate Sustainability // *Business Strategy and the Environment*. – 2002. – No 11. – Pp. 130-141.
9. Williams C.C., Millington A.C. The Diverse and Contested Meaning of Sustainable Development // *The Geographical Journal*. – 2004. – Vol. 170. – No 2. – Pp. 99-104.
10. Урсул А.Д. Концептуальные проблемы устойчивого развития // *Бюллетень РАН. Использование и охрана природных ресурсов в России*. – 2005. – № 1. – С. 30-38.
11. Sachs J.D. *The Age of Sustainable Development*. – Columbia University Press, 2015.
12. Старикова Е.А. Современные подходы к трактовке концепции устойчивого развития // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Экономика*. – 2017. – Т. 25. – № 1. – С. 7-17.
13. O'Sullivan A. *Urban Economics: 8th edition*. – McGraw-Hill/Irwin, 2012.
14. Tyrsin A.N., Gevorgyan G.G. Entropy Modeling of Sustainable Development of Megacities // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2017. – Vol. 72. – 9 p. – 012010. – DOI: 10.1088/1755-1315/72/1/012010.

15. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
16. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер. с англ. – М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1978. – 248 с.
17. Webber M.J. Information Theory and Urban Special Structures. – London: Croom Helm, 1979.
18. Haken H. Information and Self-Organization: A Macroscopic Approach to Complex Systems. – Springer, 2000.
19. Ellis R.S. Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics. – Springer, 2006.
20. Shannon, C.E. A Mathematical Theory of Communication / C.E. Shannon // The Bell System Technical Journal. – 1948. – V. 27. – No 3. – Pp. 379-423; – No 4. – Pp. 623-656.
21. Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н., Яглом А.М. Количество информации и энтропия для непрерывных распределений // В книге: Тр. III Всесоюз. математического съезда. Т. 3. – М.: АН СССР, 1958. – С. 300-320.
22. Тырсин, А.Н. Энтропийное моделирование многомерных стохастических систем. – Воронеж: Научная книга. 2016. – 156 с.
23. Prigogine I. Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. – Charles Thomas, Publishers, 1955.
24. Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. – 2-е изд., испр. – М.: Изд. дом «Академия», 2008. – 368 с.
25. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие: Человеческое измерение // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2000. – Т. 8. – № 6. – С. 12-26.
26. Гор А. Земля на чаше весов. В поисках новой общей цели. В кн.: Новая постиндустриальная волна на Западе. Антология. – Пер. с англ. / Под ред. В.Л. Иноземцева. – М.: Academia, 1999. – С. 557-571.
27. Порфирьев Б.Н. Управление в чрезвычайных ситуациях // Итоги науки и техники. Т. 1. Проблемы безопасности: чрезвычайные ситуации. – М.: ВИНТИ, 1991.
28. Тырсин А.Н., Сурина А.А. Моделирование риска в многомерных стохастических системах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 2(39). – С. 65-72. – DOI: 10.17223/19988605/39/9
29. Tyrsin A.N., Surina A.A. Monitoring of Risk of Multidimensional Stochastic System as Tools for a Research of Sustainable Development of Regions // IOP Conference Series: Earth

and Environmental Science. – 2018– Vol. 177. – 012005. – 8 p. – DOI: 10.1088/1755-1315/177/1/012005.

30. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: 8-е изд., исправл. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

31. Pena D., Rodriguez J. Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence // Journal of Multivariate Analysis. – 2003. – Vol. 85. – Pp. 361–374.

32. Тырсин А.Н. Энтропийное моделирование дискретных случайных векторов на примере группировок и балльных показателей // Современные наукоемкие технологии. – 2021. – № 1. – С. 51-56. – DOI: 10.17513/snt.38470.

33. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. – 3-е изд. – М.: ЛИБРОКОМ, 2011. – 280 с.

34. Попков Ю.С. Математическая демоэкономика: Макросистемный подход. – М.: ЛЕНАНД, 2013. – 560 с.

35. Цветков О.В. Энтропийный анализ данных в физике, биологии и технике. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. – 202 с.

36. Чумак О.В. Энтропия и фракталы в анализе данных. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. – 164 с.

37. Сибурина Т.А. Базовая оценка и практика рейтинговых оценок в здравоохранении // Социальные аспекты здоровья населения. – 2012. – № 5 (27). – URL: <http://vestnik.mednet.ru/content/view/427/30/> (дата обращения: 18.04.2021).

38. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование. Часть 2: Экспертные оценки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 486 с.

39. Ефимова М.Р., Ганченко О.И., Петрова Е.В. Практикум по общей теории статистики. – 3-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2011. – 368 с.

40. Тырсин А.Н., Шалькевич Л.В., Остроушко Д.В., Шалькевич О.В., Геворгян Г.Г. Исследование перинатального поражения центральной нервной системы у детей в неонатальном периоде методами многомерного статистического анализа // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. – 2017. – Т. 16. – № 3. – С. 595-605.

41. Тырсин А.Н., Соколова И.С. Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24. – № 1. – С. 88-102.

42. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций. – 5-е изд. – М.: Дашков и К°, 2012. – 880 с.

43. Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике. – М.: Деловой экспресс, 2004. – 352 с.
44. Кудрявцев А.А., Радионов А.В. Введение в количественный риск-менеджмент. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2016. – 192 с.
45. Rossi C. Fundamentals of Risk Management. – Wiley, 2014. – 528 p.
46. Тырсин А.Н., Сурина А.А. Модели управления риском в гауссовских стохастических системах // Информатика и ее применения. – 2018. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 50-59. – DOI: 10.14357/19922264180208.
47. Тырсин А.Н., Масленников Д.Л. Моделирование риска в неоднородных стохастических системах // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 10. – С. 101-107. – DOI: 10.17513/snt.38262.
48. Hosmer D.W., Lemeshow S., Sturdivant R.X. Applied Logistic Regression. 3th ed. – Wiley, 2013. – 528 p.
49. Dempster A., Laird N., Rubin D. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society, Series B. – 1977. – Vol. 39(1). – Pp. 1-38.
50. Jordan M.I., Xu L. Convergence results for the EM algorithm to mixtures of experts architectures: Tech. Rep. A.I. Memo No. 1458: MIT, Cambridge, MA, 1993. – 34 p.
51. Тюри А.Г., Зуев И.О. Кластерный анализ, методы и алгоритмы кластеризации // Вестник МГТУ МИРЭА. – 2014. – № 2. – С. 86-97.
52. Тырсин, А.Н. Векторное энтропийное моделирование многомерных стохастических систем. – М.: Наука, 2021. – 231 с.
53. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
54. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
55. Лойко В.И., Луценко Е.В., Орлов А.И. Высокие статистические технологии и системно-когнитивное моделирование в экологии. – Краснодар: КубГАУ, 2019. – 258 с.
56. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 430 с.
57. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ: пер. с болг. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 239 с.
58. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.

59. Болдин М.В., Симонова Г.И., Тюрин Ю.Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. – М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1997. – 288 с.

60. Basset G., Koenker R. Asymptotic theory of least absolute error regression // Journal of the American Statistical Association. – 1978. – Vol. 73. – No. 363. – Pp. 618-622.

61. Тырсин А.Н., Азарян А.А. Методы устойчивого построения линейных моделей на основе спуска по узловым прямым // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2018. – № 1 (25). – С. 188-202.

62. Тырсин А.Н., Азарян А.А. Точное оценивание линейных регрессионных моделей методом наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2018. – Т. 10. – № 2. – С. 47-56. – DOI: 10.14529/mmph180205.

63. Голованов О.А., Тырсин А.Н. Программа реализации метода наименьших модулей на основе градиентного спуска по узловым прямым: свидетельство № 2020664619 / Правообладатели Голованов О.А., Тырсин А.Н. – 2020663788; заявл. 06.11.2020; зарегистр. 16.11.2020, Реестр программ для ЭВМ.

#### **К разделу 5:**

1. Задорожная Е.А. Динамика и смазка неньютоновскими жидкостями сложнопонагруженных трибосопряжений поршневых и роторных машин: автореф. дис. ... д-ра тех. наук. – Челябинск. – 2013. – 37 с.

2. Бугаев А.М. Влияние многофункциональной присадки «Валена» на трибологические свойства рапсового масла // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ Агроинженерия. – 2008. – № 4. – С. 99-101.

3. Kuzharov A.A., Gerasina U.S., Nguyen H., Tischenko A.V., Milov A.A., Lomachenko K.A., Soldatov A.V. Nanotechnologies in Russia. – 2016. – Т. 11. – № 9-10. – С. 593-602.